

A P P E N D I X. .

SCIENTIAM SPATII *absolute veram* exhibens:

a veritate aut falsitate Axiomatis XI Euclidei
(a priori haud unquam decidenda) in-
dependentem; adjecta ad casum fal-
sitatis, quadratura circuli
geometrica.

Auctore JOHANNÉ BÓLYAI de eadem, Geometrarum
in Exercitu Caesareo Regio Austriaco Ca-
strensiuum Capitaneo.

SZÉNÁSSY BARNA

★

BOLYAI JÁNOS

AKADÉMIAI
LEVÉLTÁR

1828—1978

MEGJELENT
AZ AKADÉMIAI KÖNYVKIADÁS
150. ÉVÉBEN

A MŰLT MAGYAR TUDÓSAI

FŐSZERKESZTŐ:

ORTUTAY GYULA

TECHNIKAI SZERKESZTŐ:

SZALAI SÁNDORNÉ

507921
881003
SZÉNÁSSY BARNA

BOLYAI JÁNOS



AKADÉMIAI KIADÓ
BUDAPEST, 1978

**MTA
KIK**



600188

MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
KÖNYVTÁRA

ISBN 963 05 1451 6 az összkiadás száma

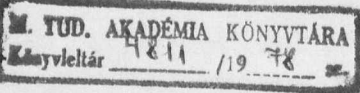
ISBN 963 05 1455 9 a kötet száma



© Akadémiai Kiadó, Budapest, 1978

Szénássy Barna

Printed in Hungary



TARTALOM

Előszó	7
Bolyai János életútja	12
Appendix. A tér tudománya	98
Az Appendix utóélete	149
Az Üdvtan	175
Bibliográfia	193

ELŐSZÓ

Ez a kis tanulmány néhány szempontból különbözik a sorozat többi könyvecskéjétől. Nem helyeztük el pl. az első oldalra Bolyai János arcképét, mert ez nem áll rendelkezésünkre. Tudjuk, hogy az egyetlen hiteles festményt, amely hadnagyi egyenruhában ábrázolta, életének egyik elkeseredett percében ő maga semmisítette meg, annyira nem vágyva — saját bevallása szerint — a „mások által vadásztatni szokott *külső* halhatatlanságra”. A „Bibliográfia” csupán három értekezését tartalmaz-

za, viszont a róla szóló tanulmányok oldalakat töltenek meg. Gazdag kézirati hagyatékából az idők folyamán sok mindent közöltek ugyan, ezek a publikációk azonban oly nagy mértékben tartalmazzák a közlétevéők egyéni megjegyzéseit, hogy ezek Bolyai Jánostól származó eredményeknek, de nem általa összeállított értekezéseknek minősítendőek. Ugyanakkor az életéről és munkásságáról szóló munkák felsorolásakor a bőség zavarával kellett megbirkóznunk: még az alapvetően fontos tanulmányok száma is több tízre tehető — ebből a gazdag irodalomból csak az olyanokat válogattuk ki, melyeket

forrásként sokhelyt felhasználtunk.

Éppen a Bolyai Jánossal foglalkozó és többségében könnyen hozzáférhető irodalom veti fel azt a kérdést, hogy mi lehet a szerepe ennek a kiadványnak? Mondhat-e a szerző az eddigieket kiegészítő vagy helyesbítő újat, és szakszerűen tájékoztathatja-e az olvasót Bolyai geometriai rendszeréről? Ez utóbbi kérdésre — matematikai formulák és szemléltető ábrák hiányában — egyértelműen nemleges a válasz. E téren kénytelenek voltunk a mindenki által követhető összefoglalásra szorítkozni. Egyes kérdésekben azonban találhatók újszerű adatok is. 1845 végén vagy

1846 elején Bolyai János papírra vetette részletező önéletrajzát, ennek néhány részét régebben Jelitai József, jóval alaposabb feldolgozását újabban Benkő Samu közölte. Ilyen módon — figyelembe véve több más, napjainkban megjelent tanulmányt is — lehetőség kínálkozott arra, hogy Bolyai János néhány új adattal kiegészített életútját és nagyszerű geometriai felfedezésének a későbbi sorsát közöljük. Mind a matematikusok, mind a kívülállók gyakran vetnek fel kérdéseket Bolyai Jánossal kapcsolatban, néhány ilyenre is iparkodunk a következő oldalakon válaszolni.

A szövegben többször idézünk Bolyai János kézírásos hagyatéká-

ból. Az ezekben kurzív betűkkel szedett szavaknak Bolyai aláhúzással adott nyomatékot. Az idézetekben zárójelben levő, az = jelet követő szavak a mi betoldásaink, és a megértés könnyítését célozzák.

Ezúton is megköszönöm Kárteszi Ferenc professzor úr igen értékes lektori észrevételeit.

Szeretném, ha ez a kis tanulmány is hozzájárulna tudósunk emlékének felidézéséhez születésének 175. évfordulója alkalmával.

Bolyai Jánosról nem lehet úgy írni, hogy ne szerepeljen az apa, Bolyai Farkas neve is. A magyarázat nem annyira a vérségi kötelék, hanem a tudományos kapcsolat, mely gondolatvilágukat összefűzte. Bolyai János megértéséhez szükséges, hogy néhány szóban utaljunk Bolyai Farkas életére és tudományos eredményeire.

Bolyai Farkas 1775. február 9-én született egy kis erdélyi faluban, Bolyán, kisbirtokos családban. A rendkívül tehetséges ifjú alsó és középfokú tanulmányait

Nagyenyeden és Kolozsvárott végezte, majd a kor szokásának megfelelően külföldi egyetemeken mélyítette el tudását. Egy erdélyi főúr fiának nevelőjeként 1796-ban öt hónapot Jénában töltött, ezután 1796 októberétől 1799 júniusáig Göttingenben bővítette ismereteit. Göttingenben szoros baráti kapcsolat szövődött közte és a tanulmányait ugyancsak ott folytató Carl Friedrich Gauss (1777—1855) között. Személyes együttlétük, baráti társalgásaik során kicserélték nézeteiket koruk aktuális matematikai és filozófiai problémáiról. Gaussnak Göttingenből történt távozása után indult meg közöttük az a fél évszázadnál hosszabb

(1797—1853) időtartamot átfogó levélváltás, melynek során az első években gyakorta, később egyre hosszabb megszakításokkal tájékoztatták egymást életük alakulásáról, apróbb-cseprőbb gondjaikról, alkalmanként az őket foglalkoztató matematikai problémákról. Ez a levelezés (négy levél híján, ezeket később ugyancsak közétették) 1899-ben nyomtatásban is megjelent. A teljes anyag 24 Bolyai Farkas és 22 Gauss által írott levelet tartalmaz. Göttingenből hazatérve Bolyai Farkas hamarosan megnősült (ebből a házasságból született Bolyai János), majd 1804-ben a marosvásárhelyi református kollégiumnak matema-

tika-fizika-kémia professzora lett. Rendkívül szegényes körülmények között élt itt és munkálkodott 1856. november 20-án bekövetkezett haláláig. Születésének 200. évfordulóját nemrégiben ünnepeltük.

Bolyai Farkas kiváló matematikus volt. Kezdettől fogva sokat foglalkoztatta pl. az euklideszi párhuzamossági axióma bizonyításának kérdése (l. később). Ezzel kapcsolatban igen éles elmére mutató, a problémát azonban lényegében meg nem oldó vizsgálatokat folytatott. Értekezéseit megbírálás céljából elküldte Gaussnak, az elsőhöz Gauss hamarosan észrevételt is fűzött, kimutatva a bizonyítás hiányosságát. A második értekezés

válasz nélkül maradt. A sikertelenség ellenére Bolyai Farkas folytatta ez irányú kutatásait, azonban egyre meggyőzőbben látta, hogy az általa követett úton a probléma nem oldható meg. Polihisztor volt, el-elkalandozott más tudományágak, sőt a szépirodalom felé is, de ezeket csak kitérő állomásoknak tekintette, mert életében a matematika játszotta a vezető szerepet. Eredményei részben kapcsolódnak a Bolyai János alkotta térelmélethez, a megfelelő helyen néhány szóban még visszatérünk rájuk.

Távol a tudományos világtól Bolyai Farkasnak csupán egy lehetősége volt matematikai eredményeinek közzétételére: az a tankönyv-

sorozat, melyet a kollégium diákjai számára írt. Művei közül legjelentősebb az a kétkötetes vaskos latin nyelvű munka, melyet hosszú címének kezdő szava után röviden *Tentamen*-nek szoktunk nevezni (első kiadása: 1832, 1833, a második: 1896, 1904).

Bolyai Farkas könyveiben — főként a *Tentamen*-ben — számos, a kor ismereteit meghaladó önálló matematikai eredményt találunk. Ezek a matematika különböző területeit érintik: a matematikai logikát, a halmazelméletet, az analízist, az algebrát, a geometria alapjait stb. A matematikai irodalomban gyakran idéznek egy tőle származó gyökközelítő eljárást,

jelentősek a pozitív tagú végtelen sorok konvergenciájára talált kritériumai stb. Talán legismertebb a „végszerű területegyenlőség” általa adott definíciója (két síkidom akkor végszerűen egyenlő területű, ha véges számú, páronként egybevágó darabokra oszthatók; más szóval, ha az egyik darabjaiból előállítható a másik, és megfordítva). Ez a reláció-fogalom reflexív, szimmetrikus és tranzitív. Később alapvetőnek bizonyult a geometria megalapozásában. Kiterjesztésével, általánosításaival ma is foglalkoznak a matematikusok.

Mint már említettük, Bolyai Farkas 1801-ben megnősült, fele-

sége Árkosi Benkő Zsuzsanna (?—1821) egy kolozsvári sebész-mester leánya volt. Az asszony szerény domáldi hozománya révén a házaspár birtoka valamicskét gyarapodott, de a nehéz anyagi helyzeten a bolyai és a domáldi birtok, valamint Farkas alacsony tanári fizetése nem sokat javított. A Benkő család kolozsvári házában 1802. december 15-én született Bolyai János. Az apa lelkesen értesítette erről az eseményről a rokonságot, büszkén írt róla távoli barátjának, Gaussnak is. Rövid domáldi tartózkodás után Bolyai Farkast hivatása Marosvásárhelyre szólította, ettől kezdve meglehetősen pontossággal tudjuk nyomon

követni a fiú, Bolyai János életét. Ehhez segítséget nyújt Bolyai Farkas levelezése, továbbá gazdag kézirati hagyatéka is. Az írásokból egyértelműleg megállapítható, hogy a tehetséges apának zseniális volt a fia. János nevelése is szerencsésen alakult, mert a pedagógus apa ügyesen össze tudta egyeztetni a szellemi képzést a test fejlesztésével. Bolyai Farkas pedagógiai elvei mai szemmel nézve is korszerűek. Az apai büszkeség több olyan adatot őrzött meg különböző írásai-ban, melyek János sokirányú szellemi tehetségét, elsősorban logikai készségét és a matematika iránti fogékonyságát bizonyítják. Tudjuk, hogy János már négyeszen-

dős korában meg tudott különböztetni néhány geometriai alakzatot, ismert több csillagképet, és általában is a gyermeki kort messze meghaladó logikai készséggel és geometriai szemlélettel rendelkezett. Az írást-olvasást hatéves korában szinte magától sajátította el, rá egy évre kezdte tanulni a német nyelvet és — az apa irányításával — a hegedűjátékot. A gyermek kilencéves koráig Farkas nem is látta szükségesnek az iskola rendszeres látogatását, még ettől kezdve is inkább házitanítók foglalkoztak Jánossal. A matematika oktatását azonban mindig az apa végezte, dédelgetett álma az volt, hogy fia kiemelkedő legyen ebben a tu-

dományban. Arról pedig, hogy Bolyai Farkas fáradozása milyen eredményes volt, Gausshoz 1816-ban írott levele tanúskodik: „... fiam 9-ik esztendejébe lépve egyebet nem tudott, csak németül és magyarul beszélni s írni, kottából meglehetősen hegedülni, még összeadni sem tudott; először Euklidésszel kezdtem, aztán megismerte Eulert, most meg már Vegának (ami kollégiumi előadásaim kézikönyve) nemcsak az első két kötetét tudja teljesen, de járatos a harmadikban, negyedikben is, kedveli a differenciál- és integrálszámítást és rendkívüli készséggel és könnyedén számol velük...”

Az apai büszkeség megértéséhez tudnunk kell, hogy Vega négykötetes munkáját egyes külföldi egyetemek vezérfonálként vették igénybe a matematikai előadásokhoz.

Gyorsan haladt előre János a hegedűjátékban is. Elsősorban technikai készsége volt e téren magas fokú, már fiatal korában el tudott játszani nehezebb koncertdarabokat. Bécsi tanulmánya idején lehetőség nyílt arra, hogy jeles szakember irányításával tovább képezze magát, azonban a későbbiek során egyre kevesebbet gyakorolt, önéletrajzában pedig már nagyon mértéktartóan ír ez irányú tudásáról. Így meg kell kérdőjeleznünk azt, hogy hegedű-„virtuóz” volt-e

— pedig ezt az életrajzírók sok helyen állítják. Külön tanult rajzot is, ebben azonban nem mutatott olyan tehetséget, mint az apa. Matematikai szempontból ez azért sajnálatos, mert a kézirati hagyatékában lévő geometriai ábrák szegényesek, és különösen annak a négynek az értelme fejthető meg nehezen, melyeket 1820-ban egyik füzetébe rajzolt, és amelyek kétségtelenül a hiperbolikus geometria néhány alapvető fogalmát szemléltetik. Saját bevallása szerint mindig unta „a sok rajzolási pepecselést”.

Bolyai János jellemére vonatkozólag is bőven van adatunk. Hulámzó lelkiállapot, kirobbanó jó-

kedv és borúlátó zárkózottság, meleg szeretet és rideg magatartás, makacsság és engedetlenség, melyet szinte átmenet nélkül váltott föl a szülők és a barátok iránti gyöngédség. Egy dologban azonban mindig következetes és tárgyilagos volt: az igazságérzetben és a bátor szókimondásban, még akkor is, ha ez rá nézve hátránnyal járt.

Körülbelül 12 esztendőskorában lett a kollégium rendes tanulója. Hozzávetőlegesen a mai általános iskolák nyolcadik osztályának megfelelő klasszisba vették föl, de egyes tárgyakat már ekkor együtt hallgatott a magasabb osztályok tanulóival. Mindig kiváló tanuló volt, és az „érettségi” vizsgálat

(a rigorosum) közeledtével egyre sürgetőbben vetődött fel a kérdés, hogy hol folytassa tanulmányait. Az apa és a fiú egyaránt azt látta leghasznosabbnak, ha a régi barát-hoz, Gauss-hoz mehetett volna matematikai tudása elmélyítése céljából. Bolyai Farkas 1816-ban meg is írta ezt a tervet Göttingenbe, azonban levelére nem érkezett válasz. Az életrajzírók közül sokan jogosnak látják Gauss hallgatását: Bolyai Farkas levele ugyanis kissé bizalmaskodó, szerencsétlen hangvételi volt. Ez a magyarázat alig fogadható el, hisz máskor is írt Bolyai Farkas dagályos stílusú, bizalmaskodó tartalmú leveleket Gaussnak (ilyen pl. az 1807. de-

cember 18-i keltű), amikre meglehetősen gyorsan érkezett válasz. És jóval később, az *Appendix* vétele után is meglepő hamar vetette papírra Gauss vitatható értékű dicsérő sorait!

Ebben az esetben inkább abban kell keresnünk Gauss hallgatásának az okát, hogy — köztudottan — mindig idegenkedett az oktatómunkától, és abból csak annyit vállalt, amennyit hivatali beosztása feltétlenül megkövetelt. Talán nem akart a levélre sem igent, sem nemet mondani, így az etikailag nem legszerencsésebb megoldást, a hallgatást választotta. Göttingenből tehát nem érkezett válasz, így az apának és a fiúnak újabb ter-

veket kellett szőnie. Mérlegelték a pesti, illetve a bécsi tudományegyetemen való továbbtanulás lehetőségét, ezt azonban csakhamar el is vetették, mivel egyik helyen sem látták biztosítva a matematikai továbbfejlődés feltételeit.

1817. június 30-án Bolyai János jeles eredménnyel abszolválta a rigorosumot, most már végérvényesen határozniok kellett. Hosszú tételődés után a döntés a katonai pályára és a bécsi mérnökakadémiára esett. A hadmérnöki akadémia a maga nemében színvonalas iskolának számított, de matematikai téren aligha tudott valami újat nyújtani Bolyai Jánosnak. Annál kevésbé, mert Bolyai

Farkas gondosan felkészítette fiát az előírt felvételi vizsgára, már csak azért is, hogy — annak eredménye alapján — a hétéves tanfolyam minél magasabb osztályába vegyék fel. Ugyanis a szabályok lehetővé tették, hogy a jelöltek — előképzettségük és tudásuk alapján — magasabb osztályba kerüljenek. Anyagi okok miatt azonban Bolyai János az érettségi vizsgálat után nem utazhatott Bécsbe, ezért egy évet még a marosvásárhelyi kollégium bölcsészeti karán hallgatott. Többek anyagi támogatása révén végül is 1818 augusztusában lehetővé vált a bécsi út.

Friedrich Gatti kétkötetes munkájából (*Geschichte der k.u.k. Tech-*

nischen Militär-Akademie. Wien, 1901., 1905.) eléggé jól ismerjük a Hadmérnöki Akadémia történetét, szervezeti felépítését, tantervi programját. Tudjuk, hogy a felvételhez elengedhetetlen követelmény volt az erős testi felépítés, és az absztrakt tudományokban való jártasság. Az egyes osztályokban a hallgatói létszám erősen ingadozott, Bolyai János 32-ed magával kezdte meg tanulmányait a negyedik évfolyamon. Ebben az évben még nem nagyon tűnt ki társai közül, a következőben azonban már második lett. Minden tárgyból — különösen a matematikából — messze kiemelkedett, csupán a rajzban és a szépírásban nem érte el a

legjobb eredményt. Ebben az évben iskolalátogatása során Johann Habsburg (1782—1859), a hadi akadémia főparancsnoka és a műszaki csapatok főfelügyelője személyesen győződött meg Bolyai matematikai tehetségéről. Elismerését külön is kifejezte üzenet formájában az apának, azzal a megjegyzéssel, hogy szorgalmas munka esetén nagy jövő vár fiára a katonai pályán. A későbbiek során János főherceg valóban figyelemmel kísérte Bolyai János sorsát, annak alakulásában jóindulatot tanúsított.

A hadmérnöki akadémia (jelenleg a katonai levéltár működik az épületben: Wien, Stiftgasse 2.) különböző iratai, valamint az apa és

a fiú közötti levélváltás révén elég sok adat áll rendelkezésünkre Bolyai János bécsi tartózkodásáról. Sajnos János leveleinek egy része megsemmisült, matematikailag éppen a legértékesebbek, melyekben folyamatosan tájékoztatta apját első geometriai vizsgálatairól. A hézagok kitöltése érdekében kissé a képzeletünkre kell támaszkodnunk, gondos mérlegelés alapján kell kiegészítenünk a hiányokat valószínűsíthető feltevésekkel. Annyi egyértelműleg megállapítható a fennmaradt iratok alapján, hogy tudományos vizsgálatait János 1818 táján kezdte el, de ekkor még észrevehetően az apja nyomdokain haladt a paralelák kérdésé-

nek kutatásában. Ifjúi lelkesedése — úgy látszik — olyan önbizalommal töltötte el, hogy legyőzhetőnek vélte azokat a nehézségeket, amelyekkel az apa két évtizeden át hasztalanul birkózott. Pontosan beszámolt akkori elgondolásairól (sajnos ezek a levelek hiányoznak), erre kell következtetnünk Farkas több válaszlevelének tartalmából. Ezekben ugyanis iparkodott lebeszélni fiát arról, hogy a paralelák kérdésével foglalkozzék. Az indok: ő már minden, eredménnyel kecsegtető útját végiggondolta ennek a „feneketlen éjszakának” — sikertelenül. Azt is tudjuk, hogy éleseszű és a matematikában sem járatlan beszélgető partnere is

akadt Jánosnak az akkor Bécsben nevelősködő Szász Károly (1798—1853) személyében. A két barát beszélgetéseinek matematikai tartalmára a későbbiek során még visszatérünk, e helyen azonban meg kell említenünk egy, a Bolyai János kézirati hagyatékában is többször szereplő, a róla szóló egy-némely tanulmányban pedig meglehetősen kiélezett eseményt. Arról a két barát közötti megállapodásról van szó, mely szerint közös sikernek fogják elkönyvelni, ha a paralelák kérdésében eredményt érnek el. Tudjuk, hogy később Bolyai János elzárkózott fogadkozásuk teljesítésétől, mégpedig teljes joggal: a két barát megegyezése

ugyanis csupán az euklideszi párhuzamossági axióma bizonyítására vonatkozott, ez pedig nem járt sikerrel. Később — eredeti célkitűzésüket félretéve — Bolyai János más úton indult el és *egyedül* építette fel geometriai rendszerét.

Név szerint ismerjük Bolyai bécsi matematikatanárait, és alkalmunk volt áttekinteni tudományos munkásságukat is. Ezek alapján bizton állíthatjuk, hogy tőlük Bolyai János kutatásaihoz legfölbőbb bátorítást kaphatott, de irányítást, segítséget nem. Le kell szögeznünk, hogy a paralelák történelmi előzményeinek ismeretét az apjától szerezte, és tudását önszorgalomból, szakkönyvek olvasásával bő-

vítette. Ez az előkészület azonban kétségtelenül jól megalapozott volt, hisz az apa talán mindazt tudta, ami a kérdéskörben addig történt.

Bolyai János bécsi tartózkodásának idejét szorgalmas iskolai munka, az akkor még kedvvel ellátott katonai szolgálat, egy-egy látogatás a Bécsben tanuló erdélyi egyetemistáknál, olykor egy színházi előadás vagy hangverseny töltötte ki. Olyan adatunk is van, hogy aktívan részt vett mint hegedűjátékos egyes koncerteken. A sűrűn érkező és mindig nevelő célzatú apai levelek híven tükrözik a távol élő és a fiáért aggódó apa lelkiállapotát, de azt a — felesége hosszan

tartó és fokozatosan elhatalmasodó betegsége miatti — nehéz sorsát is, amelyet akkor Bolyai Farkasnak el kellett viselnie. 1821-ben váltotta meg a halál a szerencsétlen nőt szenvedéseitől. Utolsó kívánságának megfelelően Domáldon helyezték örök nyugalomra, ma már csak egy kis mélyedés jelzi a dombtetőn sírhelyét. Bolyai Farkas megható levélben tájékoztatta fiát a szomorú eseményről, Jánost is megrendítette a hír, de tanulmányaiban hosszan tartó törést nem okozott.

Bolyai Farkas leveleiben számos helyen kérleli „vulkán természetű” fiát, hogy óvakodjék a világáros lazább erkölcsi életétől. Itt

— megszakítva a kronologikus rendet — néhány olyan kérdést iparkodunk tisztázni, amelyek a különböző életrajzokban és főleg a köztudatban meglehetősen elterjedtek.

Számos korabeli írás használja mind az apára, mind a fiúra alkalmazva a *hipochondria*, *hipochonder* szavakat. Ez abban az értelemben helytállónak látszik, amennyiben apró közérzeti zavarok felnagyítására utal. Az a számos levél-töredék, melyekben egymásnak gyógyszereket ajánlanak, alátámasztják azt, hogy egészségi téren meglehetősen aggodalmaskodók voltak.

Nem kímélte az utókor Bolyai Jánost nemi betegségek fölhánytorgatásától sem. A rosszindulatú hiedelem megcáfolására önéletrajzának egyik mondatát idézzük: „... minden francról (= szifilisz) tisztán maradtam”. Ez a néhány szó és főként a kiváló dermatológus, Berde Károly (1891—1971) legutóbb megjelent alapos tanulmánya tudományosan is erősíti a cáfolatot. Előzményként meg kell említenünk, hogy János élete során — apja kifejezésével élve — többször volt „ótvaros”, az ötvenes években pedig különösen sokat kínoztta valamiféle bőrbetegség. Kezelőorvosa, Péterfi Pál — egyébként jeles szakember, de nem

bőrgyógyász — naplóiban részletesen leírta e bőrbetegség szimptomáit, a kezelési utasításokat, valamint a gyógyulás tüneteit. Ezeknek az adatoknak a bőrgyógyászat mai tudása szerinti gondos mérlegelése alapján Berde Károly a következő megállapításra jut: kisebb valószínűséggel Bolyai János betegsége „pikkelysömör” (psoriasis), nagyobb valószínűséggel seborrhacás ekcéma volt. Berde kategorikusan tagadja, hogy a tünetek vérbajra utalnának.

A legbántóbb, hogy sok tudományos igényű tanulmány foglalkozik Bolyai János öröklött „elmebajával”. Ideggyógyászati szempontból az elmebaj gyűjtőfoga-

lom, a legenyhébb tünetektől a legsúlyosabbakig széles skálája van, de mindenféleként az elme kóros elváltozását jelenti. A betegség a közvéleményben elterjedt szóhasználat szerint pejoratív értelmű, és Bolyai János esetében a leghatározottabban vissza kell utasítanunk. Nála legföljebb időnként jelentkező „kedélybetegségről”, „depressziós lelkiállapotról” beszélhetünk, a hangulat szertelen hullámzására pedig annyi tudományos kudarc után alapos oka volt.

Az akadémia utolsó, hetedik osztályát 1822. szeptember 6-án fejezte be Bolyai János mint évfolyam második. A szabályok szerint

ugyanis a hat legkiválóbb növendéket rangsorolták, mégpedig a tanárok és a hallgatók közös véleménye alapján. A legjobbakat az akadémia elvégzése után nem vezényelték azonnal csapatszolgálatra, hanem továbbképzés céljából még egy évig visszatartották — ez lett a sorsa Bolyai Jánosnak is. A tanfolyam elvégzése után ezeket a mérnököket magasabb műszaki parancsnokságokhoz osztották be. Az utolsó Bécsben töltött évet már intenzív geometriai kutatásokra is felhasználta. Valószínű, hogy amikor 1823. szeptember 1-én alhadnagyi rendfokozattal a temesvári erődítési igazgatósághoz vezényelték, már tisztán látta geomet-

riai rendszerének alapjait. Tudjuk, hogy ez év szeptember 30-án érkezett meg állomáshelyére, és ezzel elkezdődött sivár katonaelete. November 3-án írta Temesvárról apjának azt a sokat emlegetett, fontos levelet, melynek néhány sorát mi is idézzük: „Kedves Édes Apám! Annyi teménytelen megírni valóm van az újj találmányaimról, hogy éppen most nem tudok másként segíteni magamon, mintha semmibe se ereszkedem belé s csak egy quartára irok; . . . A feltételem már áll, hogy mihelyt rendbe szedem, elkészitem, s mód lesz, a parallelákról egy munkát adok ki; ebbe a pillanatba *nincs* kitalálva, de az az út, melyen mentem, csak-

nem bizonyosan ígérte a cél elérésit, ha az egyébaránt lehetséges; nincs meg, de olyan felséges dolgokat hoztam ki, hogy magam elbámultam, s örökös kár volna elveszni; ha meglátja Édes Apám megesméri; most többet nem szólhatok, csak annyit: *hogy semmiből egy uj más világot teremtettem*; mindaz, valamit eddig küldöttem, csak kártyaház a toronyhoz képest.” A levélben említett „új más világ” Bolyai János geometriai rendszere. A későbbiekre hagyva ennek vázlatos ismertetését, itt csupán néhány apró észrevételt teszünk. Az első az idézetben szereplő „teremtettem”, továbbá „ebbe a pillanatba nincs kitalálva”

néhány szóra vonatkozik. Az első múltbeli, a második jövőbeni vizsgálatokra utal. E levél fogalmazásakor tehát Bolyai János bizonyára még nem állította össze értekezésének egész anyagát, tehát pontosan nem is tudjuk megmondani, hogy milyen mértékben volt azzal kész. Vannak, akik észrevételezik az idézetnek azt a sorát, „hogymiből egy uj más világot teremtettem”; ezt a kissé fellengzős mondatot nyilvánvalóan a felfedezés túláradó öröme sugallta, hiszen bizonyára Bolyai János magatudta legjobban, hogy elméletének kétezer évre visszanyúló előzményei voltak. A levelet Temesvárról írta, és ez a város híven őrzi is

Bolyai János emlékét. Az ottani kutatók a régebbi időktől egészen napjainkig büszkén említik, hogy a Bolyai-geometria szülővárosa Temesvár. Lelkesedésük nagyon tisztelendő, de némi pontosításra szorul. Ugyanis Bolyai János emlékeztető levelét Temesvárra érkezése után alig egy hónappal írta, ennyi idő pedig korántsem elegendő egy új geometriai rendszer felépítéséhez. Évekre visszanyúló és már Bécsben elkezdett töprengései értek be ekkorra oly mértékben, hogy már tisztán látta a célhoz vezető utat, egyes részeket pedig ki is dolgozott.

Hosszú távollét után 1825 elején nyílt végre alkalma, hogy meglá-

togassa Marosvásárhelyen édesapját. Ekkor írta Farkas Bodor Pálnak a következő örömteli sorokat: „Nagy kemény természetű szép ifju, a katonai bátorság, az ártatlanság szemérmességével . . . se nem kártyázik, se bort pálinkát se kávét nem iszik, se nem pipázik, se nem tubákol, még nem beretválkozik, csak péhés — rendkívül való mathematicus, igaz genie, excellens hegedüs — minden hivatalok közt leginkább szereti a katonaságot; csak az Otiumot szeretné inkább, melybe dolgozhatnék, már is sokat dolgozott a hivatal mellett is.”

Az apa és a fiú ekkori találkozása azonban nem volt zavartalan:

Farkas ugyanis még nem tudta belátni fia geometriai fölfedezésének a jelentőségét, és ismételten iparkodott lebeszélni vizsgálatai folytatásáról. De anyagi természetű nézeteltérések is támadtak közöttük. Bolyai János az anyai örökség kiadását kérte, kívánságát azonban Farkas nem teljesítette. Az elutasítás oka második házassága lehetett: Bolyai Farkas ugyanis az özvegyiséget csakhamar felváltotta egy újabb házassággal: 1824. december 31-én elvette Somorjai Nagy Terézt (1797—1833), egy marosvásárhelyi vaskereskedő lányát. Az ebből a házasságból született Bolyai Gergely (1826—1890) nagyon kedvezőtlen szerepet ját-

szott mostohafivére, Bolyai János emlékének az ápolásában: az apát dicsőítő, Jánost inkább kisebbítő életrajzi visszaemlékezést szolgáltatott a kutatóknak, adatait a nagy tekintélyű Szily Kálmán (1838—1924) a szükséges rostálás mellőzésével tette közzé. A marosvásárhelyi pletykákon kívül ez is a magyarázata, hogy olyan sok kitalált és félrevezető történet színezi a Bolyai Jánosról szóló irodalmat.

Kövessük azonban tovább Bolyai János katonai útját. 1826. április 10-én Temesvárról Aradra helyezték, nemsokára itt kapta meg főhadnagyi kinevezését. Az életrajzírók különösen itteni szolgálati

idejére teszik félelmetes párbajait. Bolyai János kiváló vívókészségéről tudunk, de a „félelmetes”, „ijesztő” kardpárbajok koholmányok. A nyárspolgári közvélemény a számára rejtélyes, zárkózott, különc embert meg nem történt események kitalálásával iparkodott még rejtélyesebbé tenni. E rossz ügy szolgálatába szegődött Clair Vilmos, aki — a bizonyára sokak által olvasott — könyvében (*Magyar párbajok*. Budapest, 1930. 162—163.) élénk fantáziával ír matematikusunkról is. Mit mondanak a hitelt érdemlő adatok? Itt elöljáróban le kell szögeznünk, hogy Bolyai Jánosnak tényleg voltak párbajai. A múlt század eme

kellőleg el nem ítéhető „igazságszolgáltatás”-át a monarchia törvényei bizonyos esetekben kötelezően előírták, főleg a tisztek számára. A viaskodások többsége azonban amolyan „tyúkszem-párbaj” volt, melyek egészen jelentéktelen sértéseket követő felfortyánások után általában bocsánatkéréssel végződtek. A hagyomány arról is szól, hogy Bolyai János még az édesapját is kihívta párviadalra. Hogy ez mennyire elképzelhetetlen, arról a hírhedt *Clairkódex* (ez volt a párbajok „törvénykönyve” hazánkban) 48. §-a győzhet meg. Ez szó szerint a következőként intézkedik: „Apa és fiú, testvér és testvér, vő és após nem

hívhatják ki egymást párbajra.” Bár e kódex rendelkezései csak a múlt század vége felé léptek kötelezően érvénybe, azonban a benne foglaltak már egy századdal előbb is irányadók voltak. Lényegében tehát Bolyai János nem is hívhatta ki az édesapát párbajra. Mindezen felül pontosan tájékoztat e kérdésben is Bolyai János önéletrajza: „Erősen, könnyen voltam sérthető, hamar rossz néven vettem valamit . . . azt gondolván: hogy szégyen, ha nem indulok föl rajta” „... több ízben volt kedvetlen összejövésem s kardra hivattattam, mi mellett azonban szerencsésen elkerültem minden tetemes sértést. Én magam csakugyan (egy

esetet az még az akadémiában, corps-kadet koromban, kivéve: mikor is az első magam hívtam spadéra [= kardpárbaj] s darabigi viaskodásunk után a társaink közbevetvén magukat, megbékéltettek) senkit ki nem hívtam. Bajnok s velem vívott társaim azonban mind az *actus* előtt, mind azután a legjobb indulatot mutatták mindig hozzám.” Ennek a szinte szégyenkező önvallomásnak megfelelően kell helyreigazítanunk a számos életrajz- és regényíró fantáziaszüleményét.

Matematikai szempontból Bolyai János aradi tartózkodásának kétségtelenül legfontosabb eseménye az volt, hogy ismét találkozott

volt bécsei tanárával, Wolter von Eckwehr századossal, akit akkor-tájt vezényeltek Aradra és ott János parancsnoka lett. Ez matematika-történeti szempontból azért jelentős, mert — jelenlegi tudásunk szerint — Bolyai János ekkor átadta Wolternek geometriai eredményei egy kézírásos összefoglalását, nyilván elbírálás céljából. Maga Bolyai aligha gondolhatott arra, hogy ezt a kritikai munkát a százados maga fogja elvégezni, hiszen erre Wolter matematikai képzettsége nem volt elégséges. Inkább az járhatott az eszében, hogy — a szolgálati út betartásával — parancsnoka megtalálja azt a fórumot, amely illetékes a munka elbírálására. Feltehető,

hogy Wolter továbbküldte a tanulmányt Bécsbe, esetleg éppen János főherceghez. Erre vonatkozólag azonban adataink nincsenek. Mind ez azért sajnálatos, mert a kézirat pontosan dokumentálná azokat az eredményeket, melyeket 1826-ig Bolyai János értekezésbe foglalt. Azonban a kézirat utáni eddigi nyomozás eredménytelen volt, lehetséges, hogy megsemmisült, de az sincs kizárva, hogy valamegyik katonai vagy Habsburg-levéltár mélyén lappang. Én sem Wolter hagyatékában, sem a bécsi katonai, illetve városi levéltárban nem bukantam a nyomára.

Talán éppen az értekezés sorsa fölötti izgalom, továbbá a színvo-

naltalan mérnöki munka következ-
tében, ettől az időtől kezdve Bo-
lyai János egyre kedvetlenebbül
látta el a katonai szolgálatot, ez
lehet a magyarázata, hogy a fő-
hadnagyi kinevezést a vártnál egy
évvel később kapta meg. Aradról
rövidebb időre Nagyváradra, majd
Szegedre vezényelték, ekkori éle-
téről csupán annyit tudunk, hogy
egyre sűrűbben jelentkeztek nála
maláriás rohamok és általában is
ingerlékenyebbé vált. Következő
szolgálati helye Lemberg volt, ide
— talán éppen gyógyulása érdeké-
ben — 1831. április vagy május ha-
vában indult. Odautaztában né-
hány napra újólag fölkereste Ma-
rosvásárhelyen régen nem látott

édesapját, ez a találkozásuk matematikai szempontból igen jelentős. Erre utal Bolyai János 1841-ben írott néhány sora: „... ha történetesen akkor éppen Marosvásárhelyen, Lembergbe levén rendelve, az atyám nem ösztönzött s mondhatni erőltetett volna a hirtelen leírásra — hihetőleg azon *Appendix* tartalma sem látott volna még napfényt”. Ha e mondathoz még hozzávesszük Bolyai Farkasnak néhány héttel később egy volt tanítványához, az akkor Bécsben tanuló Jakab Lajoshoz írott következő mondatát: „Originális nagy munka; magyar tolluból oljan mathematicus munka nem jött; akárhol számot teszen”, és

megjegyezzük, hogy e mondat Bolyai János térelméletére vonatkozik, akkor biztosan következtethetünk két dologra. Az egyik az, hogy János néhány hét alatt vetette papírra az *Appendixet* abban a végleges formában, ahogy rövidesen nyomtatásban is megjelent. A másik pedig, hogy Bolyai Farkas a kézirat alapján azonnal megértette fia geometriai rendszerét, „originális nagy munkának” tartotta, legfeljebb azt nem látta még be, hogy milyen korszakalkotó jelentőségű.

Lembergben a betegeskedő Bolyai Jánost jóindulatú parancsnoka könnyű építészeti feladatokkal, továbbá különféle katonai létesít-

mények restaurálásának felülvizsgálatával bízta meg. János azonban még ezt a könnyebb munkát is elhanyagolta, gyakran beteget jelentett. Ma már pontosan meg tudjuk indokolni magatartását: előbb értekezésének nyomdai előkészítése vonta el minden mástól a figyelmét, később a kiadást követő — rá nézve igen fájdalmas — események zavarták meg. Ez utóbbiakkal még részletesen foglalkozunk, azok alapján teljesen érthetőnek fogjuk látni, hogy katonai minősítése szerint ekkor vált szótlanná, ingerlékennyé, a társasági élettől tartózkodóvá. Csupán ottani parancsnokának jóindulatán múlt, hogy ezek ellenére 1832.

március 14-én másodosztályú századossá léptették elő.

Időközben még a következők történtek: 1829-ben Bolyai Farkas megkapta kétkötetes latin nyelvű művének, a *Tentamennek* nyomtatási engedélyét és ennek első kötete 1832-ben, a második pedig 1833-ban ki is került a marosvásárhelyi nyomdából. Bolyai János térelmélete a *Tentamen* első kötetének egyik függeléke (= appendix) volt. Azonban a könyv megjelenése előtt is kinyomtak az értekezésből néhány példányt, ezek 1831. június 20-a előtt elkészültek. A dátum pontos rögzítését Bolyai Farkasnak egy Gauss-hoz 1831. június 20-án írott levele teszi lehe-

tővé. E levélhez Bolyai Farkas csatolta az *Appendix* egy példányát is, a következő sorok kíséretében: „Az ő [ti. Bolyai János] kérésére küldöm ezt az ő kis munkáját Hozzád: légy szíves, ítéld meg éles, átható szemeddel, s válaszodban, melyet epedve várok, írd meg kímélés nélkül magas ítéletedet... Fiam többre becsüli a Te ítéletedet, mint egész Európáét.” E küldeményből azonban Gauss ekkor még csak a levelet kapta meg, az *Appendixet* nem. Bolyai Farkas valamiként tudomást szerzett erről, és ezért 1832. január 16-án új levél kíséretében ismét útnak indította az előzőhöz hasonló alábbi mondatok kíséretében: „Bocsásd meg

nekem az alkalmatlankodást, fiam
többre becsüli a Te véleményedet,
mint egész Európáét és csakis arra
vár. Szívem mélyéből kérlek, tu-
dósíts mihamarabb ítéletedről,
aszerint írok majd neki Lemberg-
be.”

A levelet és az *Appendixet* ezút-
tal megkapta Gauss, és meglepő
gyorsan, már március 6-án vála-
szolt is. E válaszlevél *Appendixre*
vonatkozó része szó szerinti fordí-
tásban a következő: „Most vala-
mit fiad munkájáról. Ha avval
kezdem, hogy nem szabad dicsér-
nem, bizonyára egy pillanatra
meghökkenesz, de mást nem tehe-
tek. Ha dicsérném, akkor maga-
mat dicsérném, mivel a mű egész

tartalma, az út, melyet fiad követ és az eredmények, amelyekre jutott, majdnem végig megegyeznek, részben már 30—35 év óta folytatott elmélkedéseimmal. Valóban a dolog rendkívül meglepett. Szándékom volt, hogy saját (idevágó) munkásságomból, melyből egyébként mostanig csak keveset tettem papírra, életemben semmit sem hozok nyilvánosságra . . . Ellenben szándékom volt, hogy idővel mindent úgy megírjak, hogy legalább ne pusztuljon el majd velem együtt. Nagyon meglepett tehát, hogy most már e fáradság felesleges, és nagyon örvendek, hogy éppen régi barátom fia előzött meg ilyen csodálatos módon . . .

Kérlek, üdvözöld fiadat részemről szívélyesen és biztosítsd különös nagyrabecsülésemről.”

Egyébként Gauss, levele mellékletében, egy hiperbolikus geometriai tétel vázlatos bizonyítását is közölte — erre a következő fejezetben visszatérünk. Tekintettel arra, hogy Gauss e levelét még többször is említjük, ezért — rövidség kedvéért — „Gauss válaszlevelé”-nek fogjuk nevezni.

A tárgyilagosság kedvéért meg kell említenünk, hogy néhány héttel előbb (1832. február 14.) hasonló tartalmú sorokat írt Gauss C. L. Gerlingnek (1788—1864), aki tanítványa volt, és ekkor mint egyetemi tanár működött Mar-

burgban. Gauss e levele kevésbé ismert — a két Bolyai sohasem szerzett tudomást róla —, ezért az *Appendixre* vonatkozó részt idézzük: „... e napokban Magyarországról egy, a nem-euklideszi geometriát tárgyaló kis művet kaptam, melyben valamennyi eszmémet és eredményemet nagy eleganciával kifejtve újra fölhalálom, bár olyan alakban, amelyet azok, kiknek új ez a dolog, tömörsége miatt nehezen követhetnek. Szerzője, aki nagyon fiatal osztrák katonatiszt, fia egyik ifjúkori barátomnak, akivel 1798-ban gyakran beszélgettem erről a dologról, bár akkor eszméim még távol voltak attól a kialakulástól és érettségtől,

melyet azoknak ez a fiatal ember adott a saját elmélkedései által. Ezt a fiatal geometert, Bolyait, elsőrangú lángésznek tartom.”

Gauss válaszlevelét az apa másolatban azonnal elküldte Lembergben levő fiának, így mindketten tudomást szereztek annak tartalmáról. A hátramaradt iratok bizonyossága szerint merőben másként értékelte a levél tartalmát az apa és a fiú. Bolyai Farkas csak a dicséretet olvasta ki belőle, a nemzetet ért nagy dicsőségnek vélte Gauss szavait, és környezetében is mindenki előtt ilyen értelemben nyilatkozott. Ezzel szemben Bolyai János becsapva érezte magát, úgy gondolta, hogy Gauss jogot

formál a fölfedezés elsőbbségére. Vajon az apának vagy a tárgyban közvetlenebbül érintett Bolyai Jánosnak volt-e igaza? A kutatók számtalan helyen feltették e kérdést, a válaszok nagyon megoszlanak. Egyéni megítélésünk szerint János zaklatott lelkiállapota és csalódottsága teljesen érthető, főként, ha meggondoljuk, hogy Gauss ilyen irányú eredményeiről pontos értesülést nem szerezhette. Ma már tudjuk, hogy Gauss sok mindent átgondolt előzőleg is egy nem-euklideszi geometria lehetőségéről, néhány idetartozó formulát igazolt is, ezeket azonban sohasem publikálta, félve a tudós világ kedvezőtlen reagálásától. Bolyai

János értekezésének kézhezvétele után mindenesetre méltányosabb eljárás lett volna, ha — a fölfedezés elsőbbségére való célozgatás mellőzésével — fenntartás nélkül elismeri Bolyai értekezésének a jelentőségét. És, ha ezen felül az *Appendixet* valamiként be is mutatta volna a tudományos köröknek, akkor bizonyára kedvezőbben alakult volna matematikusunk további pályája. Ezért nehéz elfogadnunk a jeles Bolyai-kutató, Schlesinger Lajos 1903-ban (tehát akkor, amikor már eléggé ismert volt Bolyai János életútja) fogalmazott következő sorait: „Míg a tudomány lassú fejlődéssel oda jutott, hogy az *Appendixet* méltathatta,

addig annak szerzője elhervadt csendes félrevonult magányában. De talán mégis helyesen cselekedett Gauss, midőn a fejlődés folytonos menetét nem akarta megszakítani, talán az ő tartózkodása — melyet mi, kik nagy szellemének útjait követni nem tudjuk, érthetetlennek találunk — óvta meg Jánost attól, hogy a Boeoticusok őt mint bolondot és eretneket rágalmazzák, és így legalább a magány nyugalmaiban részesíté azt, ki mint más úttörő is, meg nem élhette a tőle ültetett magból fakadó termésnek a megérését.”

Egyetlen kérdéssel válaszolunk e sorokra: vajon tényleg „a magány nyugalmaiban” részesítette-e Bo-

lyai Jánost az elismerés elmara-
dása?

A sikertelenségbe belenyugodni
nem tudó és nem is akaró Bolyai
Jánost 1832. április 26-i keltezésű
rendelettel Lembergől Olmützbe
vezényelték. Zaklatott lelkiállapo-
tában innen írt folyamodványt
régí jóakarójához, Johann Habs-
burg főherceghez, mellékelve a
kéréshez az *Appendix* első 33 §-á-
nak német nyelvű fordítását. Azt
kérte a főhercegtől, hogy tanul-
mányát bíráltassa el valakivel, to-
vábbi tudományos kutatásaihoz
pedig adjanak számára három hó-
napi szabadságot. Tudjuk, hogy
az *Appendix*ben foglaltakat akarta
kiegészíteni és bővíteni. Szabadság

iránti kérését azonban elutasították, pedig ezt egyre romló egészségi állapota is kellőleg indokolta volna. A kedvezőtlen döntés magyarázata két bírálóban keresendő. A Hadmérnöki Akadémia tanárának, G. A. Greisingernek a véleményét ismerjük. Ez azt mutatja, hogy a kérdéskörben teljesen járatlan tanár egyáltalában nem értette meg az *Appendixet*, talán nem is tanulmányozta azt, ráadásul még a Gauss levelében levő néhány dicsérő szónak is kétségbe vonta az értékét, mert azt Bolyai Farkas és Gauss ifjúkori barátságával magyarázta. Habsburg János nem volt megelégedve e felületes bírálattal, ezért hamarosan egy

újabb matematikust, A. Ettingshausen (1796—1887) bécsi tudományegyetemi professzort kérte fel a munka elvégzésére. Sajnos Ettingshausen bírálatát nem ismerjük — talán valahol ez is föllelhető —, de hogy ez elkészült és ugyancsak nem volt elismerő, azt Bolyai János 1855-ben írott egyik levelének alábbi mondata igazolja: „Ettingshausent becsülöm mint nagyérdemű és előkelő férfiút, habár annyira szerencsétlen, elvakult és elfogult, hogy minket [ti. az apát és fiút] nem tud méltatni.”

Elgondolkoztató tudománytörténeti adalék, hogy a Magyar Tudományos Akadémia (főként csillagászati és geodéziai eredményei-

ért) Gausst 1847-ben, Ettingshausent pedig 1858-ban külföldi tagjai közé választotta, de Bolyai János nevét 1868-ig még gondos kutatás révén sem fedeztük fel az Akadémia különböző kiadványaiban. Csupán egyetlen olyan „hivatalos” levélről tudunk, mely Bolyai János alkotására céloz, ezt Döbrentei Gábor (1785—1851), az Akadémia első főtitkára írta az apának. A levél tartalmának megértéséhez tudnunk kell, hogy Döbrentei nagy tisztelője és személyes ismerőse volt Bolyai Farkasnak, mert egy ideig Marosvásárhelyen is élt. Humán érdeklődésű volt, így semmit nem érthetett az *Appendix*ből, de tudott róla, és főtitkársága idején

iparkodott is valamit tenni Bolyai János érdekében. Ezt azonban csak olyan föltétel mellett érhetne volna el, ha — szem előtt tartva a Tudós Társaság akkori szempontjait — az *Appendix* magyar nyelven is megjelenik. Erre vonatkoznak Bolyai Farkashoz írott levelének következő sorai: „... fijadra a Kapitányra nézve is az a barátságos észrevételem van, hogy ha magyarul adja ki munkáját, lehet még helybeli tag itt 500 pengő forinttal, mely summa penziojához egykor jól járulna; lehet vidéki rendes tag 300 pengő forinttal”. Azonban 1835-ben Döbrenteit Toldy Ferenc váltotta fel az akadémiai főtitkári tisztségben és

Bolyai János akadémiai tagságának a kérdése többé nem merült fel.

A reményeiben csalódott, lelki-
leg összetört és ennek következté-
ben katonai szolgálatát egyre felü-
letesebben ellátó Bolyai János hely-
zete a katonaságnál tarthatatlanná
vált, ezért 1833. június 16-i hatály-
lyal saját kérésére nyugállomány-
ba küldték. Az iratok tanúsága sze-
rint felettesei sajnálkoztak a kiváló
tiszt távozásán, és nem zárták ki a
későbbi reaktiválást. Ő azonban
sohasem élt ezzel a lehetőséggel.

Bolyai János tehát testileg-lel-
kileg összetörve visszaindult Ma-
rosvásárhelyre. Abba a városba,
honnan másfél évtizeddel azelőtt

olyan nagy reményekkel kelt útra felsőbb tanulmányai céljából Bécsbe. Édesapjához, az akkor másodszor megözvegyült Farkashoz költözött. Azonban az édesapa és a lánglelkű fiú együttléte talán mindössze egy évig tartott. A két ellentétes természetű ember, a köztisztelőben álló, szinte gyerekes lelkületű Farkas és a korán megöregedett, zárkózott és mindenben csalódott János között napirenden voltak a torzsalkodások, a tudományos viták, és az anyagi természetű kérdések feletti nézeteltérések. A tarthatatlan helyzetet végül is úgy oldották meg, hogy apja hozzájárulásával János Domáldra költözött, és átvette a szerény bir-

tok vezetését. Ott élt kisebb megszakításokkal 1846-ig. Sajnos, ekkori életéről nagyon kevés adat áll rendelkezésünkre. Amit tudunk, azt az apa és a fiú közötti levelezésből okoskodhatjuk ki. E levelek általában anyagi természetű dolgokról, ritkán tudományos kérdésekről szólnak. Az adatok szerint János 1834 augusztusától egy Kibédi Orbán Rozália nevű leánnyal élt közös háztartásban. Együttlétüket az osztrák—magyar monarchia rendelkezései értelmében a katonatisztekre kötelező kaució hiányában jó ideig nem is tudták törvényesíteni. Egyébként a kaució kérdése újabb nézeteltérések forrása lett az apa és a fiú

között. Farkas elzárkózott fia ez irányú kérése elől, védve kisebbik fia érdekeit. Bolyai János és Orbán Rozália élettársi kapcsolatából két gyermek született: Dénes (1837—1913) és Amália (1840—1893). Az előbbi törvényszéki irodaigazgatóként halt meg, Amália férjhez ment, de gyermektelenül halálozott el.

Matematikai szempontból azonban nem volt eredménytelen Bolyai János domáldi tartózkodása. Szakkönyvek, az akkor már szép számmal megjelenő matematikai folyóiratok hiányában kizárólag addigi tudására és matematikai intuíciójára támaszkodva folytatta elmélkedéseit. Hátramaradt kézi-

ratai szerint ezek között bőven találunk olyanokat, melyek lényeges új eredményeknek tekintendők, de olyanokat is, melyekről kellő irodalmi tájékozottság birtokában eleve tudhatta volna, hogy reménytelen vállalkozások. Kísérleztet pl. az ötöd- és ennél magasabb fokú egyenletek gyökmeghatározó képletének kiokoskodásával, minden integrál zárt formában történő kiszámításával. Vajon honnan szerezhették volna tudomást a Ruffini—Abel-tételről vagy az elliptikus integrálok akkor gyorsan épülő elméletéről? A tudomány akkor már megadta az általa kitartó szorgalommal vizsgált kérdésekre a negatív értelmű

választ. Ezekből az időkből származó följegyzései nagyon mély és a jövőbe mutató filozófiai és szociológiai eszméket is tartalmaznak, azonban egyeseket nehézkes, körülményes fogalmazásban.

Szürke, egyhangú életéből egy pályázat rázta fel és lelkesítette munkára. 1834-ben a lipcsei Jablonowski Társaság nemzetközi pályázatot írt ki a komplex számok szerkesztési és ábrázolási problémáinak tisztázására. Erről a kérdésről az apa és a fiú már előzőleg beszélgetett, álláspontjaik azonban sokban eltértek. Amikor 1837 őszén Bolyai Farkas értesült a pályázatról, úgy vélték, hogy kettejük vitájának eldöntéséhez legal-

kalmasabb út, ha pályamunka formájában nyújtják be elgondolásukat. Sajnos, a két pályázat postázásával kapcsolatos történések újabb nézeteltérésre adtak okot az apa és a fiú között. Ezeket az eseményeket az életrajzírók csaknem kivétel nélkül részletesen leírják. Tény, hogy végül is mindkettőjük munkája megérkezett Lipcsébe, ezen kívül még egy harmadik, Kerekes Ferenc (1784—1850) debreceni professzor értekezése. Tudomásunk szerint ez volt az egyetlen olyan nemzetközi matematikai pályázat, melyen kizárólag magyarok vettek részt. A három pályamunka közül kétségtelenül a Bolyai Jánosé volt a legértékesebb,

azonban a bíráló bizottság sem az ő, sem az apa dolgozatát nem látta méltónak jutalmazásra. Kerekes Ferenc filozófiai gondolatokkal tetelűzdelt, zavaros és igen nehezen követhető értekezése a pályadíj felét kapta. Bolyai János *Responsio* jeligés értekezése sok vonatkozásban megelőzte kora felfogását, azonban a bíráló bizottság ezt nem vette észre, és főként azokat a képleteket nem tudta értékelni, amelyeket Bolyai János az *Appendix*ből kölcsönzött. E formulák a képzetes számok egy új, geometriai alkalmazására mutatnak rá. Hogy is tudhatták volna ezeket az eredményeket a bírálók kellőleg méltányolni, mikor az *Appendix* el

sem jutott hozzájuk? Részletező és módszeres kidolgozás esetén talán ezúttal Bolyai Jánost nem érte volna újabb kudarc. Ma már, fölverte az utolsó század ez irányú ismereteivel, a *Responsio* néhány gondolatát meglepődve olvassuk. Kétségtelen, hogy Bolyai János egyike volt azon első tudósoknak, akik a komplex számok precíz elméletét megalkották. Ezenfelül a *Responsio* egyik mondatából az is kiderül, hogy helyesen látta a komplex számoknak a reális világgal való összefüggését: „... csak is olyan dolgok, és így csakis olyan mennyiségek lehetnek a *józan* kutatás tárgyai, amelyek valóban megvannak (pl. anyagiak, a testi

vagy a külső világ részei, vagy legalábbis elgondolhatók és lehetségesek)”.

A pályázat sikertelensége újabb csalódást okozott Bolyai Jánosnak. Annál is inkább, mert ez alkalommal is látta gondolatai eredetiségét. „Kár, hogy a nagy kincs méltatlan kezekbe került” — e szavakkal fakadt ki ekkor, de keserűségére ezúttal sem talált gyógyírt.

Bolyai Farkas úgy látta, hogy János nem jó gazda, nem fordít kellő gondot a domáldi birtokra. Különösen azért lobbant haragra, mert fia a birtokon levő erdő egy részét kivágatta, és a kitermelt fát eladta. 1846-ban aztán Farkas másnak adta bérbe a gazdaságot —

Jánosnak új lakhelyről kellett gondoskodnia. Szerény kis házat építtetett Marosvásárhelyen és családjával oda költözött. Így az apa közelében, de nem mindig vele egyetértésben peregtek élete hátralevő évei. Az apát rendkívül zavarta János különc, zárkózott, a kisváros mindig pletykaéhes lakói előtt sok szóbeszédre alkalmat adó családi kapcsolata. Bedőházi igen kiszínezve írja le ezeket az éveket, nyilván az utókor felnagyított és eltorzított szájhagyományára támaszkodva. Látható, hogy nem tudta függetleníteni magát azoktól az előítéletektől, melyek az évek során egyre bővültek a nagy tekintélyű professzor, Bolyai Far-

kas javára és külön életű fia kárára. Bedőházi könyvének ez a szubjektív szemlélet a legnagyobb fogyatékosága, nem pedig az, hogy negyedfélszáz oldalt szánt Bolyai Farkasra és szűk száz oldalt Bolyai Jánosra. Ez az aránytalanság még megmagyarázható azzal, hogy az apára vonatkozólag több adattal rendelkezett, valamint, hogy Farkas matematikai tevékenységét úgy-ahogy megértette, a Jánosét azonban nem.

A szabadságharc hatással volt mindkettőjükre. Az apa nagyon aggodalmaskodva szemlélte az eseményeket és szinte látnoki szemmel jövendölte meg a bukást. A fiú betegségére hivatkozva — többek

kérése ellenére — nem vett részt a harcokban, de Deák Farkas (1832—1888), az ismert történetíró naplója szerint jelen volt egy szűkebb körű bizalmas megbeszélésen, amelynek olyan haditerv kidolgozása volt a célja, hogy miként lehetne kiverni a Szászrégenben székelő császári hadakat a székelekből toborzott katonasággal. Állítólag ezen a megbeszélésen Bolyai János is előadta hadászati elgondolásait. Az esemény megtörténtét Benkő Samu megkérdőjelezi azzal az indokkal, hogy Bolyai János kézirati hagyatékában erre semmi utalás sem található. Benkő nagyon megfontolt sorai sem zárják ki azonban annak

a lehetőségét, hogy a megbeszélésre vonatkozó feljegyzéseket — ha voltak ilyenek — Bolyai János később megsemmisítette, bár ezt nem tartja valószínűnek, mert Bolyai János a szabadságharccal kapcsolatos többi kéziratát gondosan megőrizte. Én a magam részéről mégis megtörténtnek vélem az eseményt, mégpedig két okból: egyrészt Deák Farkas naplótöredéke annyi ténybeli adatot közöl (kétségtelenül téveset is) az 1848. október 30-án tartott bizalmas értekezletről, hogy mindazt nehéz koholmányoknak tekintenünk. Másrészt, vajon ésszerű lett volna-e Bolyai Jánosnak erre vonatkozó feljegyzéseit — ha ilyeneket készített —

megőriznie, mikor azok az önkényuralom idején ránézve a leg-súlyosabb következményekkel járhattak volna.

A szabadságharc alatt Marosvásárhely és környéke rövid időre elszakadt az osztrák csapatok ellenőrzésétől, és így lehetőség nyílt arra, hogy ne vegyék figyelembe a monarchia tisztjeire vonatkozó rendelkezéseket. 1849. május 18-án akadt is egy olyan marosvásárhelyi református pap, aki a kaució letétele nélkül bejegyezte a matrikulába Bolyai János és Orbán Rozália házasságát. Bolyai Farkas 1852-ben írott egyik leveléből azonban azt is tudjuk, hogy a szabadságharc leverése után „János-

nak a Császár nem hagyta helybe a házasságát”.

Mint említettük, matematikai problémák több-kevesebb intenzitással mindig foglalkoztatták Bolyai Jánost. Évtizedeken át dolgozott például a geometria szigorú megalapozásán, precíz fölépítésén. De a szerkezetileg jól átgondolt munka, melynek előszavát már 1834-ben megírta, csonka maradt. Ez azért különösen sajnálatos, mert a kézirat több értékes, főleg a topológiába tartozó önálló gondolatot tartalmaz.

Matematikai szempontból még egy esemény volt igen jelentős a két Bolyai életében. Ennek előzménye az volt, hogy egy Gauss-

nál járt erdélyi diák újságcikke révén 1844-ben értesültek Lobacsevszkij *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien* (Berlin, 1840.) című könyvéről, a munkát azonban csak jóval később, 1848-ban sikerült megszerezniök. A hátramaradt írások bizonyossága szerint mindketten gondosan tanulmányozták, megértették azt, sőt kiegészítéseket, észrevételeket is fűztek hozzá. Bolyai Farkas megjegyzései élete utolsó, nyomtatásban is megjelent kis tanulmányában, a *Kurzer Grundriss*ben (Marosvásárhely, 1851.) olvashatók. Sajnos Bolyai János észrevételei csak kéziratban maradtak hátra, és azokat összefüggő tanulmányként

jóval később (1900) tette közzé Paul Stäckel és Kürschák József. Ez a tanulmány azt mutatja, hogy Bolyai János először gyanakodva, bizalmatlanul fogadta Lobacsevszkij munkáját, de amint egyre jobban elmélyült annak tanulmányozásában, gyanakvását fokozatosan a megbecsülés, sőt a csodálat hangja váltotta fel. Erős értékítéletét és emberi nagyságát igazolja a kézirati hagyatéék Lobacsevszkijre célzó következő mondata: „... én örömet megosztom a találói érdemet”. Talán nem tévedünk, ha azt állítjuk, hogy Lobacsevszkij geometriai vizsgálatainak Gauss után első tárgyilagos értékelője a két Bolyai volt.

1852 végén Bolyai János szakított Orbán Rozáliával, és ezzel elhárult az apa és a fiú közötti megértés legfőbb akadálya. A bizalmatlanságot a kölcsönös megbecsülés, szeretet és egymás matematikai munkásságának teljes elismerése váltotta fel. Így, midőn az apát, az öreg professzort 1856-ban a kollégium csengettyűjének a hangja és a város lakossága véglegesen elbúcsúztatta, Bolyai János kétszeresen is árva maradt: elvesztette édesapját és egyetlen megértő tudóstársát. Az apa segítőkészségét, sorsformáló hatását szép szavakkal nyugtázta az öregedő Bolyai János: „Atyámnak örök hála, s poraira, hamvaira is áldás”.

Élete utolsó éveiben már nem annyira matematikai problémák foglalkoztatták, hanem egy, az emberiség boldogulását célzó enciklopédikus munka, az *Üdvtan*. A kézirati hagyatékot részletesen Benkő Samu dolgozta fel. Az ő tanulmánya alapján állíthatjuk, hogy Bolyai János tiszta, szigorú logikája végig megmaradt, sok — elsősorban nyelvészeti és haladó szociológiai — gondolata részletes kidolgozás esetén értékes munka lett volna.

Azonban a módszeres alkotáshoz ezekben az években már nem volt Bolyai Jánosnak elegendő sem a testi, sem a lelki ereje. Lelkiileg az egyedüllét és a csalódottság

tette mind terhesebbé napjait, testileg az ismételten jelentkező málária és a kínozó bőrbetegség viselte meg. Tudjuk, hogy betegsége orvoslására minden lehetséges módot kipróbált, még az akkor divatba jött Priessnitz-kúrát is, de gyógyulást csak átmenetileg talált. 1860. január 27-én magára hagyottan, mások könnye és részvéte nélkül — talán tüdőgyulladásban — hunyt el tudományos életünk egyik legnagyobb alakja.

Amennyire lehangoló volt egész tudományos pályája és életének utolsó szakasza, épp annyira megrendítő a végtisztesség is: halotti gyászmenetét az előírásoknak megfelelően hivatalból kivezényelt két

tiszten kívül — tudomásunk szerint — mindössze három polgári személy alkotta. Jó ideig még sírjának helyét sem ismerték, csak egyetlen személy tartotta ezt meg emlékezetében: Szöts Júlia szolgálóleány, aki szerény háztartását vezette az utolsó években. 1893-ban ő tudta megmutatni a jeltelen sírt, amidőn azt a tudósélet néhány tiszteletreméltó tagja keresgélte. Halálakor pedig az alábbi sorok kerültek a református egyház matriculájába: „Bolyai János, nyugalm. Ingenieur Kapitány — m. h. agy és tüdőgyulladásban. — Híres, nagy elméjű mathematicus volt, az elsők között is első. Kár, hogy nagy talentoma használatlanul ásatott

el.” 1894-ben a „Mathematikai és
Physikai Társulat kegyelete jeléül”
sírkövet is állíttatott emlékére.
1911. június 11-én pedig a hivata-
los előírások betartása mellett a
külön sírban nyugvó apát és fiút
kihantolták és egymás mellé he-
lyezték. Azóta az életben oly sokat
békétlenkedő két tudós közös sír-
hant alatt alussza örök álmát a
marosvásárhelyi református teme-
tőben.

APPENDIX.
A TÉR TUDOMÁNYA

E fejezet címe egyben rövidített címe Bolyai János egyetlen olyan tanulmányának, mely már életében megjelent. Az e könyv elején fakszimileként közölt latin szövegű címlap magyar fordítása a következő: „Appendix. A tér abszolút igaz tudománya a XI. Euklidész-féle axióma (a priori soha el nem dönthető) helyes, vagy téves voltától független tárgyalásban; annak téves volta esetére, a kör geometriai négyszögesítésével.”

Mielőtt rátérnénk az *Appendix* tartalmának — e könyvsorozat

hagyományaihoz szabott — rövid ismertetésére, néhány előzetes megjegyzést kell tennünk. A hazai, valamint a külföldi irodalomban Bolyai János tanulmányát csaknem mindenütt *Appendix* címmel idézik. Ez a szokás valójában téves, hisz az „appendix” szó csupán arra utal, hogy az értekezés a *Tentamen* „függeléke” volt. Annak magyarázata, hogy mégis ez a téves cím honosodott meg a szakirodalomban, visszanyúlik a két Bolyai egymás közti levelezéséig. Ők ugyanis gyakorta vették igénybe utalásaik során — rövidség kedvéért — az appendix szót és használata főként ennek következtében vált megszokottá. Ma már

— úgy gondolom — céltalan e szóhasználat ellen harcolnunk, annyit azonban meg kell tennünk, hogy hozzácsoljuk „A tér tudománya” szavakat, ugyanis ez legalább valamit elárul a dolgozat jellegéről. Ez annál is inkább helyreigazító, mert Bolyai János egy német nyelvű fogalmazványán a *Raumlehre* cím szerepel.

Maga az értekezés a címlappal, az ezt követő oldalon felsorolt Bolyai-féle matematikai szimbólumokkal és a kétoldalas hibajegyzékkel együtt 28 oldal terjedelmű. Ehhez csatlakozik a 23 ábrát feltüntető utolsó oldal. A szöveg igen primitív nyomdai technikájától eltérőleg az ábrák tetszetősek. A

tanulmány 43 §-t tartalmaz, közöttük vannak 4—5 sorosak, de jóval terjedelmesebbek is.

A tanulmány fogalmazása rendkívül tömör, egy-egy állításának értelmén helyenként sokat kell töprengenünk. Ez a tény olyan értelemben volt hátrányos, hogy a mű jelentőségének felismerését ez is késleltette.

Bolyai János értekezésének címében szerepel a „tér” szó. Ha valamilyen modernebb lexikont felütünk, akkor e fogalomnak többnyire két definícióját találjuk. *Filozófiai* szempontból a tér „az anyag létformája, az anyagi tárgyak kölcsönhelyzeteinek halmaza, elvonatkoztatva a közöttük levő kap-

csolatok konkrét tartalmától”. Tekintettel arra, hogy a különféle jelenségek időben és térben játszódnak le, az anyagtól és az időtől független önálló tér létezése elfogadhatatlan. A tér eme szabatos filozófiai definíciójához a tudomány több évezredes útja vezetett, miközben helyes és téves felfogások váltogatták egymást. A modern értelmezéshez a fizikai ismeretek gazdagodása is hozzájárult, mert a fizikai jelenségek térben és időben játszódnak le. A második — jelen esetben minket közelebb-ről érintő — térfogalom a *matematikában* jelentkezik, és ehhez a tapasztalásból absztrakció útján jutunk. Az anyagi világ térbeli for-

máinak, összefüggéseinek a vizsgálata a geometriának a feladata. Ezen a területen az ógörög matematika már i.e. a III. században eléggé nem csodálható magas színvonalat ért el Euklidész *Elemek* című könyvében. Euklidész kora matematikai ismereteinek rendszerbe foglalására törekedett. Az elődök által írt művekre, az elméletek alkalmazásainak, valamint az elméletekhez vezető gondolkodásnak a tapasztalataira támaszkodott.

Az euklideszi geometriai rendszer felépítési módja csodálatra méltóan tökéletes még akkor is, ha a későbbi és a mai matematika-gondolkodás szintjén bizonyos hiányosságai előtűntek. A geometriai

gondolkodást az Euklidésztől eredő axiomatika befolyásolta. Az euklideszi axiomatikát (a Hilbert-félétől és a modern axiomatikától megkülönböztetendő) *klasszikus axiomatikának* is mondjuk.

Az euklideszi axiomatika lényege a következő. A geometria definiálatlan elemeit, mint a tér, a pont, az egyenes stb. ismerteknek tételezzük fel. Az alapelemekre vonatkozó bizonyos feltevéseket ismertnek, igaznak, mindenki számára nyilvánvalónak fogadjuk el. Mint pl.: „Legyen megengedett bármely pont, mint középpont köré akármekkora sugárral kört rajzolni.” A klasszikus értelemben vett axiomatizálásnál nem kell

axiómaként megfogalmazni (vagyis kiemelni) minden olyan feltevést, amit magától értetődőnek tartunk.

A görögök a bennünket körülvevő fizikai tér valódi szerkezetét akarták megismerni. Az ő felfogásuk szerint érzékszerveink a valóságot többé-kevésbé tisztátalan, pontatlan, sőt torz formában közvetítik értelmünk számára. Csakis az értelem képes a valóság lényegét megragadni. Az axiómák szerepe éppen az, hogy következtetéseink ne az érzékszervi úton szerezhető, bizonytalan információkra, hanem a nyilvánvalóan igaz axiómákra támaszkodjanak. Bár az axiómák is a tapasztalat alapján elfogadott fel-

tevések, de egyszerűségük folytán kétségtelenül helyesek. Éppen ezért nyilvánvaló, hogy az axiómák logikai következményei is a valóságot tükrözik.

Az euklideszi érvelési mód olyan fegyelmezett gondolkodást fejlesztett ki, hogy az két évezreden át éreztette hatását főként az egzakt tudományok fejlődésében.

A görög tudósok már az ókorban megkísérelték Euklidész axiómarendszerét kiegészíteni és egyszerűsíteni. Pl. az első axióma eredetileg csak azt fejezte ki, hogy *van* két pontot összekötő egyenes. Azt azonban az axiómákból nem lehet levezetni, hogy *csak* egy ilyen

egyenes van, ezért az első axiómát kiegészítették. Mélyebb kutatásokra ösztönözte a matematikusokat az ún. *párhuzamossági posztulátum* (későbbi leírásokban párhuzamossági axióma): „*Legyen megengedett: ha egy egyenes két másikat úgy metsz, hogy az egyik oldalán lévő belső szögek összege két derékszögnél kisebb, akkor a metsző egyenesnek azon az oldalán a másik két egyenes metszi egymást.*”

Kerestek és találtak olyan axiómát, amely ezzel ekvivalens, amellyel tehát az eredeti helyettesíthető, azonban szemléletesebbnek, könnyebben felfoghatónak tűnik, mint az eredeti. Ezek közül néhányat itt kiemelünk.

1. Minden háromszögben a szögek összege két derékszög összegével egyenlő.

2. Egy egyenesen kívüli ponton át csak egy az egyenessel párhuzamos egyenes vonható.

3. Három különböző pont vagy egy egyenesen, vagy egy körön van.

Egy mélyebb probléma mintegy két évezreden át, a XIX. század elejéig izgatta a kritikus elméket. A probléma a következő. A párhuzamossági axiómától különböző többi axióma alkotta rendszert jelöljük M -mel. Sokan úgy vélték, hogy a párhuzamossági axióma az M alapján bizonyítható tétel, tehát valójában nem axióma. Gauss, Bolyai János és

Lobacsevszkij (egymástól függetlenül) tisztázták, hogy a párhuzamossági axióma az M alapján nem bizonyítható be, más szóval független az euklideszi többi axiómától. Gauss (levelezése alapján) úgy látszik, hogy 1804-ben még nem tudta, de az 1820-as évek elején már tisztázta, hogy a párhuzamossági axióma az M alapján nem bizonyítható. A tudománytörténeti kutatások szerint Euklidész korától 1800-ig száznál több „bizonyítás” látott napvilágot, természetesen mindegyikben hibás okoskodás rejlett. Az a tény is figyelmet érdemel, hogy a hibás bizonyítások közül 67 az 1760—1800 közötti intervallumban jelent meg.

Bolyai Farkas a XVIII. század végétől kezdve évtizedeken át behatóan vizsgálta a geometria euklideszi axiómarendszerét. Különböző írásaiban a párhuzamossági axiómával ekvivalens kilenc posztulátumot közölt. Egy hibás, de mégis figyelemre méltó bizonyítást is talált, amelyből adódna, hogy a párhuzamossági axióma a többi axióma következménye. A bizonyításba becsúszott finom hibára Gauss mutatott rá egyik levelében.

Bolyai János 17—18 éves korában kezdte el a paralelák kérdésének kutatását, kezdetben az apja által követett úton haladva. Azonban csakhamar rátért egy forradal-

mian merész, új irányra. Ennek az a lényege, hogy a többi axiómát megtartva tagadjuk (pontosabban szólva: általánosítjuk) az euklideszi párhuzamossági axiómát, és ilyen módon alapozzuk meg a tér geometriai leírását.

Euklidész szerint két (egy síkban levő) egyenes akkor párhuzamos, ha ezeket egy harmadik egyenessel metszve, a metsző egyenes egyazon oldalán keletkezett két belső szög összege 180° . A párhuzamosság Bolyai-féle értelmezése ennél általánosabb: két egyenes párhuzamossága esetén az említett két szögnek az összege vagy mindig 180° , vagy mindig kisebb 180° -nál. Az euklideszi értelmezés-

től való eme eltérés a geometria felépítése során egyre meglepőbb következményekkel jár.

Itt tudunk válaszolni arra a sokak által feltett kérdésre, hogy mi volt a szerepe e vizsgálatokban Bolyai János barátjának, a geometria megalapozásán ugyancsak gondolkodó Szász Károlynak. Az ide tartozó hézagos följegyzések egész meggyőzően bizonyítják, hogy kettejük beszélgetése még csupán egy helyettesítő axióma bizonyítása körül forgott. Az is föltételezhető, hogy beszélgetéseik során először valóban Szász Károly mondta ki azt a szót, amit a szakirodalom az *elpattanás* szögének ne-

vez, és ami a hiperbolikus geometriában szerepet is játszik. Ennél tovább azonban nem is jutottak, tehát fel sem merült beszélgetéseik során egy új geometriai rendszer kidolgozásának a terve.

Az *Appendix* olyan tételeket tartalmaz, melyek a Bolyai János által értelmezett párhuzamosságból és az euklideszi geometria többi axiómájából dedukálhatók. Az értekezés 15. §-ában könnyen érthető módon tesz különbséget Bolyai a geometriai rendszerek között: „... nevezzük a geometriának azt a rendszerét, mely Euklédész XI. axiómája igaz voltának feltevésén épül fel, Σ -, az ellenkező

feltevésen építettet pedig S -rendszernek.”

A Σ -rendszer tehát az *euklideszi*, az S -rendszer pedig — a ma használatos terminológia szerint — a *hiperbolikus* geometria.

„Mindazok a tételek, amelyeknél nem említjük kifejezetten, hogy vajon a Σ - vagy az S -rendszerben érvényesek, abszolút igazak, vagyis állítjuk, hogy érvényesek akár Σ , akár S teljesül a valóságban.”

Az itt, valamint az *Appendix* címében szereplő „abszolút igaz” kifejezésből alakult ki — valószínűleg Frischauf (később említendő) könyvének a hatására az *abszolút-geometria* elnevezés: ab-

szolút geometriának nevezzük azoknak a tételeknek az összességét, amelyek a párhuzamossági axióma elhagyásával visszamaradó axiómákból dedukálhatók.

Az S -rendszerben, vagyis a Bolyai-féle hiperbolikus geometriában meglepő, az euklideszi szemlélet szerint hamisnak látszó tételek érvényesek. Ennek az érzékeltetése céljából idézzük a hiperbolikus geometria néhány fontos tételét.

Ha az AX félegyenesen az X pont az A kezdő ponttól minden határon túl távolodik, akkor az X középpontú, az A ponton áthaladó, vagyis változó kör nem egyeneshez mint határvonalhoz, hanem egy görbe vonalhoz konver-

gál. Az így értelmezett alakzatot *paraciklus*nak nevezzük.

Bármely háromszög területe kisebb egy az egész térben érvényes (véges) c értéknél, mégpedig úgy, hogy mindig van $c - \varepsilon$ területű háromszög, bármilyen kicsiny ε -t választunk.

Egy a egyenessel határolt félsíkon az a -tól egyenlő távolságban levő pontok nem egyenes, hanem görbe vonalat alkotnak. Ezt a vonalat *hiperciklus*nak (távolságvonálnak) nevezzük.

Bármely paraciklusból (akár ugyanazt a paraciklust is tekinthetjük) egybevágó hurok egybevágó paraciklusíveket vágnak ki. (Más szóval: a paraciklusok egy-

bevágó alakzatok, s bármely paraciklus önmagában „eltolható”, helyesebben elmozgatható.)

Persze mindazok a tételek, melyek M -ből (vagyis a párhuzamosági axióma mellőzésével) levezethetők — Bolyai János szavaival *abszolút* igaz tételek — mind az euklideszi, mind a hiperbolikus geometriában érvényesek.

Az euklideszi és a hiperbolikus geometria térfogalma közti viszony még érthetőbbé válnék bizonyos, képlet-formában kifejezett tételek tanulmányozása révén. A formulák közlésétől el kell tekintenünk, de megemlíjtük, hogy bennük szerepel egy k -val jelölt határozatlan pozitív konstans szám,

a Bolyai-geometria *paramétere*. A k -nak az értékétől függően voltaképp a Bolyai-geometria végtelen sok geometriát foglal magában, mivel a k paraméternek végtelen sok különböző értéke lehet. Az pedig, hogy az objektív világ törvényszerűségeit a k milyen értéke esetén írja le hűen a geometria, csak a gyakorlat döntheti el. Ha $k \rightarrow \infty$, akkor a Bolyai-geometria képletei rendre átmennek az euklideszi geometria megfelelő, jól ismert formuláiba. Azt mondhatjuk tehát, hogy az euklideszi geometria a Bolyai-geometria speciális esete.

Néhány szerkesztési feladat is szerepel az *Appendix*-ben, ezek kö-

zött a legmeglepőbb annak az igazolása, hogy a hiperbolikus geometriában — az euklideszi geometriától eltérőleg — van négy-szögesíthető kör. Ennek az eredménynek a megértéséhez tudnunk kell, hogy a „körnégyyszögesítés” ógörög eredetű szerkesztési feladat. A görög matematika a szerkesztési feladatokhoz egy körző és egy (egyenes élű) vonalzó használatát engedte meg. Euklideszileg szerkeszthetők azok a feladatok, amelyek e két eszközzel megoldhatók. A körnégyyszögesítés problémája a következő: adott területű körhöz megszerkesztendő az ugyanolyan területű négyzet. Ehhez nyilvánvalóan az lenne szük-

séges, hogy körző és vonalzó használatával a kör sugarának ismeretében megszerkesszük annak a négyzetnek az oldalhosszát, mely négyzetnek a területe megegyezik a kör területével. Két évezredet kitevő és számos matematikust foglalkoztató eredménytelen kísérlet után Lindemann német matematikusnak 1882-ben sikerült igazolnia, hogy az euklideszi geometriában a kör nem négyszögesíthető.

Az *Appendix* utolsó §-ában szerepel a síkháromszög területének hiperbolikus geometriai képlete. Ha ugyanis a háromszög szögösszegét két derékszög összegévé kiegészítő szög ívmértékét — az ún. *defektust* — δ -val, a háromszög területét

Δ -val jelöljük, ekkor a hiperbolikus térben $\Delta = \delta k^2$. E képletből kiolvasható az — a már említett — meglepő tény, hogy a hiperbolikus geometriában van maximális területű háromszög. Ilyen az a háromszög, melynek a defektusa maximális, vagyis egyenlő π -vel. Ezt a háromszöget határháromszögnek nevezzük.

Az *Appendix* utolsó §-aiban tárgyalt szerkesztések módját nyújtjuk arra, hogy körzős-vonalzós abszolút szerkesztéssel megszerkesszük a határnégyszöget és a vele egyenlő területű kört. Vagyis a hiperbolikus geometriában a körnégyszögesítés kvadrátúra problémája *megoldható*. Erre az

eredményre az értekezés címe is utal.

Bolyai Jánossal lényegében egy időben fektette le a hiperbolikus geometria alapjait a kazányi egyetem matematika professzora, N. I. Lobacsevszkij (1792—1856). Eltekintve néhány jelölés- és szakki-fejezésbeli különbségtől, rendszereikben a leglényegesebb eltérés a következő: Lobacsevszkij mintegy szembeállította az euklideszi és a hiperbolikus geometriát, és ez utóbbit részletesen kifejtette. Az *Appendix*ben levő tételek többsége ezzel szemben abszolút jellemző, és csak a legszükségesebb mondanivalóknál választja szét az euklideszi és a hiperbolikus geometri-

át. Azonban közös jellemzője a két rendszernek, hogy a paraméter végtelen nagy értéke esetén az euklideszi geometriát szolgáltatják.

Egyébként a két rendszer csaknem egyidőben született, és tartalmilag is meglepően egyezik. Ez könnyen magyarázható: a múlt század húszas éveire már annyira megérett a paralelák kérdésének tisztázása, hogy egymásról mit sem tudva és egymástól függetlenül ketten is felfedezték a megoldáshoz vezető utat. Tudjuk, hogy őket megelőzve Gausst is foglalkoztatták ezek a kérdések — itt a helye tehát, hogy részletezzük a fölfedezés időrendiségének kérdését.

Gauss egyik, Bolyai Farkashoz 1804-ben írott levelében még annak a reményének adott kifejezést, hogy az euklideszi 5. posztulátum bebizonyítható. Hosszabb szünet után a múlt század tízes, húszas éveiben vette elő ismét e problémát, időközben valószínűleg sok mindent átgondolt, azonban papírra alig vetett valamit, és eredményeiből semmit sem publikált. Elmélkedésének beszédes dokumentuma Taurinushoz 1824. november 8-án írott levele. Ebben szó szerint a következőt olvassuk: „Az a feltevés, hogy a három szög összege (a háromszögben) 180° -nál kisebb, egy sajátságos, a mi (euklideszi) geometriánktól tökéletesen

különböző, de teljesen logikus geometriához vezet; ezt a geometriát teljesen kielégítően kifejlesztettem, s így abban a helyzetben vagyok, hogy bizonyos állandó meghatározásának kivételével, amelyet »a priori« megállapítani lehetetlen, bármely feladatot meg tudok oldani.” Mint már említettük, 1832-ben keltezett válaszlevelében közölte Bolyai Farkassal a háromszög (hiperbolikus geometriai) területi képletének vázlatos levezetését. Nyilvánvaló, hogy ezt ő már előzőleg ismerte. A Gausztól visszamaradt hézagos feljegyzésekből a kutatók meglehetősen pontossággal összeállították azt, amit egy új geometriai rendszerről átgondolt.

Ez több fontos észrevételt tartalmaz, eredményeit azonban ő sohasem foglalta rendszerbe. Azt nem vonhatjuk kétségbe, hogy zsenialitása révén elgondolásait rendszerré is ki tudta volna építeni, ha figyelmét e cél irányába fordítja. Ha ezenkívül legyőzi afölötti aggodalmát, hogy a nem-euklideszi geometriát a tudós világ — elsősorban filozófiai okokból — támadni fogja, és gondolatait közzéteszi, akkor a térfogalom modern elméletében bizonyára az első hely illetné meg. Így azonban csak annyit mondhatunk, hogy a nem-euklideszi geometriának *egyik* felfedezője, de nem megalkotója volt.

Bolyai János 17—18 éves korában talán mindazt tudta, ami addig a paralelák kérdésében történt, éppen az apa oktató munkája eredményeként. Bécsben 1820 táján lényegében az ő nyomdokain indult tovább, bebizonyítani iparkodván az euklideszi ötödik posztulátumot. De az is bizonyos, hogy már 1820-ban kezdett érlelődni benne az a gondolat, hogy a párhuzamossági axióma nem bizonyítható be. Erről tanúskodik négy olyan ábra, melyeket ekkor hevenyészve egyik füzetének fél oldalára rajzolt, és amelyek a hiperbolikus geometriában fontos szerepet játszó több fogalom (paraciklus, hiperciklus, párhuzamos-

sági szög, hiperbolikus geometriai határnyolcszög) intuitív elképzelését mutatják. Mintegy hároméves töprengés után írta 1823. november 3-án Temesvárról azt a — már említett — levelét, amely szerint „semmiből egy újj, más világot” teremtett. Ez a levél azonban nem ad pontos felvilágosítást arra vonatkozólag, hogy vizsgálódásaiban eddig az időpontig mennyire jutott. Ugyanis a múlt idejű „teremtettem” szó mellett ott áll a következő sorokban az a megjegyzés is, hogy még „nincs kitálva”. Nyomozásunkban egy lépéssel tovább jutunk későbbi feljegyzése alapján, mely szerint 1823 végén birtokában volt — „éppen

télben éjféli tájban rontván át” — az *Appendix* 29. §-ában foglaltaknak. Ebben a §-ban szerepel a hiperbolikus geometria legalapvetőbb összefüggése, a párhuzamossági távolság és a hozzátartozó párhuzamossági szög S rendszerbeli formulájának levezetése. Mindezek alapján azonban még mindig nem tudnánk válaszolni arra a kérdésre, hogy mikorra készült el az *Appendix* egész anyagával, hisz a mű 43 §-ból áll. Azonban az apához 1855. október 4-én írott — s nemrég közzétett — leveléből erre vonatkozólag is kapunk némi útbaigazítást. E levél minket érdeklő mondata szó szerint így hangzik:

„A Gauss régi leveleiben, mint már akkor rögtön is mondtam, úgy emlékezem, még 1824-ben észrevettem, hogy azt ő is átlátta, hogy a lapi Δ (= síkháromszög) terje (= területe), ha mindenik oldal $\rightarrow \infty$ is, S -ben csak vég-határos (= véges).” Ez az idézet Gauss „leveleiről” szól. Nyilvánvaló, az egyik levél az, amelyben Bolyai Farkassal közölte az általa talált helyettesítő axiómát, a másik pedig az *Appendix* vétele után írott válaszlevele, melyben a háromszög területének hiperbolikus geometriai formuláját vezette le. Jelen esetben azonban a mi szempon-tunkból az „1824.” évi dátum a lényeges, mert ebből arra kell

következtetnünk, hogy 1824-ben Bolyai János már ismerte a háromszög területi képletét. Ez pedig — mint mondtuk — az *Appendix* utolsó §-ában szerepel. Következésképp Bolyai János 1824-ben már az *Appendix* egész anyagát összeállította.

A továbbiakra nézve annyit ismét tudunk, hogy az így összeállított térelmélet fogalmazványát átadta 1826-ban Wolter von Eckwehrnek. Ha ez a dolgozat birtokunkban lenne, akkor pontos választ tudnánk adni arra a kérdésre is, hogy eddig az időpontig milyen módszerekkel és mennyire dolgozta ki geometriai rendszerét. Nagyon valószínű, hogy az utána

következő években Bolyai János egyes bizonyításokat újra átgon-
dolt, finomított, kiegészített. A kö-
vetkező fontos dátum az időrendi-
ség megállapításánál az, hogy
1831. június 20-ra az *Appendix*
különlenyomatai elkészültek.

Lobacsevszkij fölfedezésének idő-
rendűségét — V. F. Kagan és B. L.
Laptyev adataira támaszkodva — a
következőként vázolhatjuk: 1823-
ban *Geometria* című előadásának
kéziratában Lobacsevszkij már vilá-
gosan kifejtette, hogy a párhü-
zamos egyenesek posztulátumá-
nak bizonyítását célzó addigi
összes kísérletek sikertelenek vol-
tak. Ezt követőleg 1826. február
11-én (régí időszámítás szerint) a

kazányi egyetem fizikai-matematikai karának egyik ülésén előadást tartott, amely már a nem-euklideszi geometria alapjainak kifejtését tartalmazta. Ez a jelentés azonban — éppúgy, mint Bolyai János első kézírata — elveszett. 1829-ben pedig a Kazanyszkij Vesztnyik című folyóiratban közölte *A geometria alapjairól* szóló értekezését. Ez — Kagan szavai szerint — „annyira alapos kifejtését tartalmazza a nem-euklideszi geometriának, hogy összes többi geometriai műve már csak ugyanannak az anyagnak átdolgozása és továbbfejlesztése”.

Csodálatos időrendi megegyezése két, egymásról semmit sem

tudó kutató fölfedezésének! Ha összevetjük a Bolyai Jánosról és Lobacsevszkijről közölt adatokat, akkor azt kell mondanunk, hogy az elsőbbség kérdésében lehetetlen a sorrendezés: Bolyai János valamivel hamarabb gondolta át értekezésének anyagát, a közzététel elsőbbsége viszont Lobacsevszkijt illeti. Ilyen módon a történelmi tények teljes mértékben igazolják a Bolyai—Lobacsevszkij vagy fordítva: Lobacsevszkij—Bolyai-féle geometria elnevezés tárgyilagosságát.

Az előbbi adatok közlése után nem érdektelen, ha néhány szót fordítunk a Riemann-geometriára. Elöljáróban annyit, hogy Bo-

lyai és Lobacsevszkij fölfedezése után a következő — mégpedig igen jelentős — nem-euklideszi geometria alapjait Bernhard Riemann (1826—1866) ismertette, a göttingeni egyetemen 1854. június 10-én tartott magántanári próbaelőadásán. A próbaelőadásnak megfelelő húsz oldal terjedelmű értekezés (mely nyomtatásban csak 1867-ben jelent meg) vázlatosan egy, a Bolyai-féle abszolút geometriánál is általánosabb geometria alapjait tartalmazza, nem támaszkodva Lobacsevszkij és Bolyai eredményeire. Ezzel kapcsolatban G. Vrănceanu fölteszi azt a kérdést, vajon miért nem tartotta Riemann szükségesnek, hogy előadásában Lo-

bacsevszkijt és Bolyait idézze, hollott műveiket „bizonyosan ismerte”. Vrănceanu válaszként azt mondja, hogy talán Riemann nem tudta részletesen követni Lobacsevszkij és Bolyai eredményeit, vagy pedig nem értett egyet az általuk adott hiperbolikus geometriával. De vajon Riemann tényleg ismerte-e Bolyai és Lobacsevszkij tevékenységét? Erre a kérdésre nem tudunk határozott választ adni.

Fel szokták tenni azt a kérdést is, vajon mivel magyarázható, hogy amíg Bolyai és Lobacsevszkij geometriai rendszere olyan nagyfokú megegyezést mutat, addig az eze-
ket követő Riemann-geometria az

előbbiektől lényegesen különbözik, azoknál általánosabb. Véleményem szerint a válasz a következő: a Bolyai—Lobacsevszkij geometria csak *egy* euklideszi axiómát tagadó rendszer, ebben az értelemben a régebbi térfogalom *legközvetlenebb* megváltoztatása és kidolgozása viszonylag egyszerű matematikai eszközöket igényel. Riemann n dimenzióra ($n = 1, 2, 3, 4, \dots$) általánosította az addig háromdimenziósnek képzelt „tér” elméletét, erősen támaszkodott Gauss felületelméletére (*Disquisitiones circa superficies curvas* 1827.), továbbá az analízis azon mély módszereire, melyek az 1830-as évek táján kezdtek kialakulni. Bo-

lyai és Lobacsevszkij rendszerük fölfedezése idején nem ismerhették Gauss felületelméletét és az analízis újabb eredményeit.

Itt kell még egyszer visszatérnünk arra a tényre, hogy az *Appendix* tételeinek többsége abszolút jellegű, vagyis olyan, mely egyaránt érvényes az euklideszi és a hiperbolikus geometriában. E két rendszer szintézise azonban még ennél is magasabb álláspontot képvisel, miként azt Kagan is mondja: Bolyai kijelentései ugyanis „nemcsak az euklideszi és a Lobacsevszkij—Bolyai-féle geometriában érvényesek, hanem a Riemann-féle *elliptikus* geometriában is [ami ugyancsak Riemanntól

ered. — Sz. B.]. Nem túlozunk, ha azt mondjuk, hogy Bolyai a valóságban bármely állandó görbületű tér alapjait megalkotta, vagyis kiválasztotta azt az anyagot, amely tiszta geometriai formában az összes állandó görbületű terekre vonatkozólag közös kifejezést tételez fel. Nem lehet azt mondani, hogy az *Appendix* felépítése ebben a viszonylatban egész szigorúan megérett, de tartalma rendkívül közel jár ehhez.”

A hátramaradt iratok bizonyossága szerint Bolyai János az *Appendix* közzétételével nem érezte befejezettnek kutatásait. Tudjuk, hogy még gazdag olyan anyaggal

rendelkezett, amelyet nem foglalt értekezésébe. Így pl. leleményes számításokat végzett annak a kérdésnek az eldöntésére, hogy geometriai rendszere nem tartalmaz-e ellentmondást. Ellentmondástalan egy axiómarendszer, ha nem lehet axiómáiból egy állítással együtt annak ellenkezőjét is bebizonyítani. Bolyai rendkívül hosszadalmas számításaiban — melyek kézirati hagyatékában voltak találhatóak — az ellentmondástalanság kérdését az euklideszi térgeometria ellentmondásmentességére vezette vissza. Módszere azonban végleges feleletet erre a kérdésre nem adhatott. Mindenesetre Lobacsevszkijnek és Bolyai Jánosnak egyaránt

érdeme, hogy felismerték e kérdés eldöntésének a fontosságát. Ezt a tényt az utókor számos helyen kiemeli, mint Bolyai János és Lobacszevszkij munkásságának egyik legmélyebb olyan gondolatát, amely az axiomatikus módszerrel kapcsolatos kutatásokat elindította. A későbbi időkben végzett vizsgálatok alapján annyit tudunk mondani, hogy a Bolyai—Lobacszevszkij-féle geometria ellentmondástalan, ha az euklideszi geometria ilyen; továbbmenőleg az euklideszi geometria ellentmondás mentes, ha ellentmondás mentes a valós számok aritmetikája.

Foglalkozott Bolyai János a tetraéder-térfogat hiperbolikus-geo-

metriai formulájának a kérdésével is. A problémára Gauss is felhívta válaszlevelében — az apa útján — Bolyai János figyelmét, de Farkas egyik írásának közlése szerint János már előbb, közvetlenül az *Appendix* kinyomása után „megtalálta a formulát”.

Sok helyen tárgyalt probléma az, hogy a hiperbolikus geometria megalkotása vajon milyen mértékben módosította a tér fogalmának Kant által vallott idealisztikus fel fogását. Kant ugyanis a teret és az időt velünk született fogalomnak tekintette, más szóval — szerinte — a tér nem érzéki-tapasztalati, hanem a tapasztalattól független (a priori) szemléleti forma. E foga-

lom geometriai leírására pedig a két évezred óta sikerrel alkalmazott egyetlen geometriai rendszert, az euklideszit vélte használhatónak, mivel annak semmilyen — addig ismert — fizikai jelenség nem mondott ellent. A mai felfogás szerint azonban a tér nem „a priori”, hanem a tapasztaláson alapuló „a posteriori” ítélet. Az, hogy az euklideszi-geometria kizárólagossága téves, már abból is következik, hogy egyik axiómája (a párhuzamossági axióma) „a priori” nem bizonyítható. Bolyai (éppúgy mint Gauss és Lobacsevszkij) tisztán látta ezt, az *Appendix*-ben szereplő „a priori haud unquam decidenda” (= a priori soha el nem

dönthető) szavak is utalnak erre. Vagyis arra a kérdésre, hogy a tér milyen szerkezetű, csak a tapasztalat adhat választ. Tehát — miként Alexits György mondja — „Bolyai a valóság viszonyainak vizsgálatánál jogtalannak tartotta az ember önkényes gondolatait ráerőszakolni a világra, mert a világ az embertől függetlenül, objektív valóságként létezik”. Az utóbbi idők gondos vizsgálata az *Appendix*ben levő számos tételről külön-külön is igazolta, hogy azok ellentmondanak a tér Kant-féle idealisztikus értelmezésének. Bolyai korszerű felfogását a kéziratban maradt hagyatékából vett két idézettel is alátámaszthatjuk:

„... a különben sok érdemű és szépelméjű KANT erősen alaptalan, s helytelenül el-ficamodva az értelmetlen tant tanálta is állítani: hogy az űr, üdő nem önálló-mi, hanem csak nézlet vagy látványa-ink *idomja* (!).” Másutt ugyanezt a gondolatot a közvetkezőképp fogalmazta: „... a híres és sok elméjű, derék KANT helytelen véleménye, nézete az időről, elmélve, merő-kórságban születtnék... Így az üd, űr... fogalom világos és tiszta, föl-tisztult; s úgy nevezett »idealista philos« (ophusok) azon aggálja: mi szerént tán csak az ő lelkiük létezne, rajtuk kívül semmi sem tanálna lenni, merőben el-enyészett.”

A Bolyai—Lobacsevszkij-féle geometria így válhatott a kiinduló pontjává azoknak a fontos és mély vizsgálatoknak, melyeket a szakirodalom röviden „a fizika geometrizálásának” nevez. Azonban az Einstein-féle relativitáselmélet, továbbá a csillagászati és a magfizikai vizsgálatok a múlt század vége óta a Riemann-geometriát és annak messzemenő általánosításait helyezték előtérbe. Lényegében a világ minél pontosabb megismerésének a vágya vezetett a napjainkban is folyamatban levő vizsgálatokhoz, a szemlélettől már teljesen elszakadt különféle *absztrakt* térelméletekhez. Ezekre gondolva úgy hihetnénk, hogy a Bo-

lyai—Lobacsevszkij-féle geometriát már messze túlhaladta a modern fölfogás, és jelentősége csupán abban áll, hogy megindítója volt egy rendkívül jelentős kutatási területnek. Valójában e felfogás téves, mert a Bolyai—Lobacsevszkij-féle geometria napjainkban szinte reneszánszát éli: számos alkalmazása van például a magreakciók elméletében és az elemi részecskék fizikájában.

A fejlődésnek ilyen alakulását intuitíve szinte előre látta Bolyai Farkas és Bolyai János. Már az apa fölvetette azt a gondolatot, hogy a tér szerkezetére a bolygók mozgásából lehet következtetni. De ezt az elvet vallotta Bolyai János

is, mert egy hátramaradt kéziratában a gravitáció és a geometriai tér kapcsolatát így fogalmazta meg: „... a nehézkedés törvénye is szoros összeve köttetésben, folytatásban tetszik (mutatkozik) az űr termetével, valójával (alkatával) miljenségével”. Ezzel a gondolat-
tal Bolyai János a fizika geometrizálása egyik első úttörőjének tekinthető.

AZ APPENDIX UTÓÉLETE

A következőkben azt iparkodunk felvázolni, hogy milyen úton és mikor kezdte a tudósvilág elismerni Bolyai János fölfedezésének a jelentőségét. Miként eddig, úgy ebben a szakaszban is sokszor kell említanünk az apa nevét, hisz ketőjüknek nemcsak az élete és a tudományos munkássága, de az ezekről szóló későbbi irodalom is szorosan összefonódik. Közismert, hogy a két Bolyai matematikai tevékenysége — míg éltek — sem Magyarországon, sem külföldön nem keltett számottevő visszhan-

got. Pontosabban szólva: Bolyai Farkas könyveiről néhány rövid véleményt olvashatunk ugyan, ezek azonban kivétel nélkül igen elmarasztalóak. Ettől függetlenül mind az apa, mind a fiú nagy matematikus hírében állott, legalábbis közvetlen környezetében. Csak éppen az nem állapítható meg, hogy mire alapozták ezt a véleményt, hisz műveiket gondosabban senki sem tanulmányozta.

Kérdés tehát, hogy két tudósunk milyen előzmények után, és kiknek a munkássága révén foglalta el a matematika történetében méltán megillető helyét.

Itt rögtön le kell szögeznünk egy sajnálatos tényt: a két Bolyai

„fölfedezésének” úttörői nem magyarok voltak. Hazai tudományos életünk csak haláluk után, és akkor is külföldi kezdeményezések hatására döbbsent rá arra, hogy e téren mulasztásai és teendői vannak.

Az első írás, mely a Bolyai nevet — főként az apáét — szélesebb olvasóréteg számára is hozzáférhető módon említette, egy, a Gauss emlékének szánt tanulmány volt. Gauss halálát közvetlenül követve hozzákezdtek írásos hagyatéka rendezéséhez, és Sartorius von Waltershausen, e munkának az irányítója, értesülve a Bolyai Farkas és Gauss közötti levelezésről, elkérte a Bolyai Farkas birtokában levő

Gauss által írott leveleket. Ennek figyelembevételével állította össze a Gaussról szóló nekrológot, mely 1856-ban jelent meg németül. Ebben az írásban szerepel Bolyai Farkas néhány életrajzi adata is.

A két Bolyai több matematikai eredményével érdemben legelőször Richard Baltzer (1818—1887) német egyetemi tanár foglalkozott *Die Elemente der Mathematik* (1860., 1862.) című kétkötetes munkájában. Baltzer tevékenysége azért jelentős, mert könyvét többször is kiadták, és kifejezetten e könyv hatásának tulajdoníthatjuk a Bolyai-geometria elismerésének egyik legjelentősebb eseményét: azt ugyanis, hogy 1867-ben az *Appen-*

dix megjelent francia nyelven, a bordeaux-i egyetem professzorának, G. J. Hoüelnek (1823—1886) a fordításában. Hoüel mind Bolyai János, mind Lobacsevszkij néhány geometriai eredményéről Baltzer könyvéből szerzett tudomást, és meglepő éleslátással észrevéve az ügy fontosságát, előbb Lobacsevszkij *Geometrische Untersuchungen* . . . c. könyvét adta ki franciául, ezt azonban még ugyanebben az évben követte az *Appendix* is. Ezáltal Bolyai János értekezése könnyebben hozzáférhetővé vált a matematikusok számára. E kiadás előkészítésekor kapcsolódott be a munkálatokba a Bolyai kérdés egyik legszorgalmasabb és legeredmé-

nyesebb harcosa, Schmidt Ferenc (1827—1901). Schmidt építész-mérnök volt, előbb Temesvárott, majd Budapesten. Fáradhatatlan gyűjtőmunkája során sok adatot talált két tudósunk életéről. Hoüel 1867 februárjában fordult felvilágosításokért Schmidthez, és ő vonzó stílusban, szeretettel írott életrajzot postázott már ugyanennek az évnek a végén. Ez csakhamar megjelent franciául és németül. A jeles matematikátörténész, Boncompagni (1821—1894) szorgalmazása révén olaszul is kiadták 1868-ban az *Appendixet*. Boncompagni közvetlenül az akkori magyar kultuszminisztertől, Eötvös Józseftől érdeklődött a Bolyai-ügy állása

felől. Levelének hatására ekkor írta Eötvös József fiának, Lorándnak a következő sorokat: „... örültem és elszomorodtam egyszerre... s most nem tudom, hogy büszkéek legyünk-e rá [ti. Boncompagni levelére] vagy piruljunk”.

Mindenesetre az említett kiadványok és levelek hatással voltak a magyar tudományos életre. Már az *Appendix* francia kiadásának hírére 1868-ban Hunyady Jenő (1838—1889), a budapesti műegyetem matematika professzora azt indítványozta a Magyar Tudományos Akadémiának, hogy egy bizottság vizsgálja át a két Bolyai hagyatékát és készítsen javaslatot fontosabb eredményeik kiadásá-

ra. Az események fölkellették ugyan a figyelmet Bolyai János alkotása iránt, de geometriai rendszerének elismerése még hosszú ideig váratott magára. Nem volt azonban szerencsésebb Lobacsevszkij és Riemann fölfedezésének a sorsa sem — az utóbbié már csak azért sem, mert híres magántanári próbaelőadását (1854) jóval később, 1867-ben publikálták. Mindenesetre a Bolyai—Lobacsevszkij-féle geometria közönyös, sőt kifejezetten ellenséges fogadtatásán némileg módosított Beltrami 1868-ban közzétett értekezése, melyben igazolta, hogy a *pseudoszférán* (a csapból vékony sugárban folyó vízszugár felszínére em-

lékeztető felület) érvényesek a hiperbolikus geometria tételei. Beltrami ezzel modellt adott a Bolyai—Lobacsevszkij geometria szemléltetésére, és módszert is relatív ellentmondástalansága igazolására. Az első nem-euklideszi geometriák ellenzőinek többsége ettől kezdve már nem annyira a matematikusok, hanem inkább a filozófusok közül került ki. Tény, hogy a múlt század 60-as, 70-es éveiből eredő számos írásban találunk olyan állításokat (a magyar irodalomban még később is), melyek szerint a nem-euklideszi geometriák elfogadhatatlanok, és ellenkeznek a józan geometriai szemlélettel.

Ennek az ellenséges magatartásnak egyik szenvedő alanya a haladó gondolkodású osztrák matematikus, Johann Frischauf (1837—1924) gráci egyetemi tanár volt. Az ő munkássága hangsúlyozott figyelmet érdemel, mert az 1871/72. tanévben már kurzusszerű előadást is tartott a nem-euklideszi geometriákról, anyagát főleg Bolyai János művéből merítve. Ez az előadássorozat volt az *Appendix* első részletező ismertetése, amely azért jelentős, mivel nyomtatásban is megjelent (*Absolute Geometrie nach Johann Bolyai*. Leipzig, 1872.). Ez a könyvecske volt sokáig az egyetlen olyan munka, mely a nem-euklideszi geometriát hatá-

rozottan az *Appendixre* támaszkodva, elemi szintetikus úton építette föl. A könyv előszavából tudjuk, hogy Frischauf eredetileg az *Appendix* kommentárokkal ellátott kiadására készült, e szándékától azonban eltérítette az az értesülése, hogy Kőnig Gyula (1849—1913), a budapesti műegyetem professzora már dolgozik ilyen kiadványon (más irányú elfoglaltsága miatt Kőnig elállt e szándékától). Hasonló a tartalma Frischauf *Elemente der absoluten Geometrie* c. (Leipzig, 1876), az előbbinél terjedelmesebb, részletezőbb művének is. Bolyai János munkája mind Magyarországon, mind külföldön elsősorban Frischauf könyvei révén vált is-

mertté. Az ő szerepét azért is ki kell emelnünk, mert korszerű előadásaiért, bátor kiállásáért az osztrák tanügyi szervek és egyes tudományos körök részéről heves támadásokat kellett elszenvednie.

A nem-euklideszi geometriák elismertetése és relatív ellentmondástalanságuk igazolása terén kiemelkedő érdemeket szerzett Felix Klein. A kartársakkal folytatott vég nélküli viták során alakult ki benne az a meggyőződés, hogy a nem-euklideszi geometriák a projektív geometria speciális fejezeteiként is tárgyalhatók. Elgondolásait 1871/72-ben tette közzé, ez tartalmazza a Cayley—Klein-féle modellt.

Valamely axiómarendszerre épített tér szerkezetének egy más axiómarendszernek megfelelő térben való reprezentálása, vagyis a *modellalkotás* azonban először Bolyai és Lobacsevszkij művében fordul elő. Ők a hiperbolikus térben határoztak meg olyan felületet, amelyben az euklideszi síkgeometria valósul meg. Beltrami viszont az euklideszi térben állított elő olyan felületdarabot, amelyen a hiperbolikus síkgeometria valósul meg.

Ezekben az években a Magyar Tudományos Akadémia által szervezett „Bolyai Bizottság” (tagjai: Vész János Ármin, König Gyula, Hunyady Jenő és Schmidt Ferenc)

elkészítette jelentését, és ebben kijelölte a két Bolyai hagyatékából újra kiadandó részeket. A terv megvalósítása azonban még hosszú időt vett igénybe, többször módosult is. Ám a késedelmeskedés évei nem múltak el haszon nélkül. Ugyanis a hagyaték feldolgozása során egyre-másra fedeztek föl a Bolyaiaktól származó olyan eredményeket, melyek általánosításokra, további vizsgálatokra nyújtottak lehetőséget. A múlt század utolsó két évtizedében ilyen módon alakult ki nálunk a két Bolyai eredményeire támaszkodó, ezeket részletező tudományos irodalom. Ennek az alábbiakban csak a Bolyai Jánost érintő néhány főbb

mozzanatát említtem. A bevezető Réthy Mór (1848—1925) egyetemi tanár 1874-ben az *Appendix*ről tartott előadása volt, ez hamarosan nyomtatásban is megjelent magyarul és németül. Réthy célul tűzte ki, hogy kedvet ébresszen az *Appendix* tanulmányozásához, és ennek érdekében számos, Bolyai Jánostól származó tétel könnyebben követhető bizonyítását közölte. Egyébként Réthynek az volt az elve, hogy a hazai kutatásoknak elsősorban a két Bolyai tevékenységéből kell kiindulniok, arra kell támaszkodniok.

Réthy munkájának a kolozsvári egyetemen nagyhatású folytatója volt Vályi Gyula (1855—1913),

aki az 1891/92. tanév második félévétől kezdve többször tartott speciál-kollégiumot *Bolyai János Appendixéről*. Kár, hogy ez a rendkívül átgondolt és precízen felépített előadássorozat nyomtatásban soha nem jelent meg, néhány sokszorosított példánya azonban fönnmaradt. E szerint Vályi előadásának mintegy harmadát a történelmi előzmények ismertetésére fordította, ezt követőleg pedig az *Appendixet* kommentálta a paragrafusok sorrendjében haladva. Kétségtelen, hogy ez a kommentár hatott a későbbiekre is (Dávid Lajos).

Bolyai János elismertetésének egyik jelentős állomása volt, hogy

a nem-euklideszi geometriák népszerűsítésébe a múlt század 90-es éveiben bekapcsolódott a texasi Austin egyetemének matematika professzora, G. B. Halsted (1853—1922). Előbb Lobacsevszkij legfontosabb értekezése jelent meg angolul az ő fordításában, 1891-ben pedig sor került az *Appendix* angol nyelvű kiadására is — hat éven belül négyszer. Halsted tevékenysége azért jelentős, mert mint az ügyért lelkesedő és teljesen elfogulatlan személy feladatának tekintette annak tudatosítását, hogy Lobacsevszkij és Bolyai János egyenlő megbecsülést érdemel. Addig ugyanis úgy alakultak az események, hogy Lobacsevszkij

értekezéseit többször adták ki, részletezően kommentálták is, az oroszok nagy gondot fordítottak kiváló tudósuk elismertetésére. Így pl. Kazányban szobrot állítottak Lobacsevszkijnek, továbbá emlékének megörökítésére jelentős összegű pályadíjat létesítettek. Ezekről az eseményekről 1895-ben Halsted beszámolt az egyik amerikai tudományos folyóiratban, és ebben szinte szemrehányólag említette a magyar tudományos körök mulasztásait. Bolyai János iránti megbecsülését azzal is kifejezte, hogy 1896 nyarán elzarándokolt a marosvásárhelyi sírhoz. Ez alkalommal ő kérte föl az ottani kollégium tanárát, Bedőházi Jánost

(1853—1915), hogy írjon a két Bolyairól terjedelmesebb monográfiát.

A múlt század vége felé a francia tudósok Poincaré elnökletével egy terjedelmes matematikai bibliográfiát készítettek elő. Ennek a kiadványnak a nem-euklideszi geometriai műveket felsoroló fejezete — a magyar tudósok közbenjárására — a „Bolyai—Lobacsevszkij-féle geometria” címet kapta. A hiperbolikus geometria megjelölésére (a nevek sorrendjétől eltekintve) ettől az időponttól kezdve szokta az irodalom együtt említeni a két tudós nevét.

Évtizedekig húzódó lassú előkészítés után jelent meg a *Tentamen*

második kiadása (1897., 1904.), e kiadás második kötetének a 359—394. oldalain szerepel az *Appendix* is. Egyébként az *Appendixet* 1897-ben adták ki először magyar nyelven, egyszerre két fordításban. Az egyik Rados Ignác, a másik — mint fordítás a jobbik — Suták József munkája. Az ezeket követő magyar kiadások finomítottak az első fordításokon, de némiképp azokat is figyelembe vették.

A századforduló táján aztán tényleg magasra szökött a lelkesedés, mely arra volt hivatott, hogy a két Bolyai életét és tevékenységét a világ elé tárja. Gondos előkészítő munka után 1899-ben megjelent Bolyai Farkas és Gauss leve-

lezése. Ennek a kiadványnak az előkészítése során kapcsolódott be a munkálatokba Paul Stäckel (1862—1919) német matematikus, aki jól ismerte Gauss geometriai munkásságát, de lelkesedett a két Bolyai eredményeiért is. Nem riadva vissza a nyelvi nehézségektől, áttanulmányozta (Kürschák József segítségével) a két Bolyai hagyatékát, és kutatásait a magyar és német nyelvű közlemények egész sorában tette közzé. Lényegében az ő munkája révén derült fény Bolyai János több — az *Appendix*-ben nem szereplő — matematikai vizsgálatára is. A Stäckel által írott kétkötetes munka (mely magyar és német nyelven jelent meg) ki-

sebb pontatlanságai ellenére még ma is olyan alapvető, hogy a Bolyai-kérdés tanulmányozása során nem hagyhatjuk figyelmen kívül.

Ilyen előzmények után érkezett el Bolyai János születésének centenáriuma, erre az alkalomra egy díszes külsejű tanulmánykötetet adtak ki, a Magyar Tudományos Akadémia pedig — a Lobacsevszkij-díj mintájára — „Bolyai-díj”-at létesített. Az alapítólevél szerint a díjat először 1905-ben adták ki, ezt követőleg pedig minden ötödik évben szándékoztak odaítélni „bárhol és bármely nyelven megjelent legkiválóbb matematikai vizsgálatokért”. Sajnos e kitüntetésre csak kétszer került sor: 1905-

ben Poincarénak, 1910-ben pedig Hilbertnek ítélték oda. Az első világháború idején azonban akadoztak a nemzetközi tudományos kapcsolatok, pénzünk is elértéktelenedett, és a szép kezdeményezésnek nem volt folytatása.

Párhuzamosan ezekkel az eseményekkel fokozatosan bevonult a két Bolyai a hazai regény- és drámairodalomba is. Amennyire örvendetes ez első pillanatra, épp annyira sajnálatos, hogy az irodalom — kevés kivételtől eltekintve — hatásvadászat érdekében nem a lényegből, a történelmi tényekből meríti anyagát, hanem a két tudósunk személye köré fonódott elhanyagolható eseményekből,

olykor valótlan mendemondák-
ból. Ezek révén lett a köztudatban
idők folyamán Bolyai János a tu-
domány izgága, párbajhős fene-
gyereke. Eközben az alkotói gyöt-
relem és az állandó mellőzöttség,
amely életét beárnyékolta, csak-
nem teljesen feledésbe merült. Va-
lahol itt kellene megragadni Bo-
lyai János „tragédiáját”, ezáltal ta-
lán elhalványulnának a személyé-
hez tapadt regényesítő ferdítések.

Röviden így foglalható össze a
Bolyai-geometria elismerésének és
a róla szóló szépirodalom kialaku-
lásának kezdeti szakasza. A jelen
században is voltak (és vannak)
hazai és külföldi tudósok, kik egy-
egy monográfiában, tanulmány-

ban fölidézték (és fölidézik) Bolyai János emlékét. Különösen gazdag eredményt hoztak a jelen század második felében tartott különféle Bolyai évfordulók. Szaporodott az *Appendix* fordításainak száma is (szerb, 1928., román, 1954.), ezek közül kiemelendő az orosz nyelvű kiadvány (Moszkva—Leningrád, 1950.). Itt a fordítói munkát és a kommentálást a kiváló geométer, V. F. Kagan végezte. Egyébként Kagan egy igen színvonalas tanulmányban össze is hasonlította Gauss, Bolyai János és Lobacsevszkij nem-euklideszi geometriai eredményeit. Ezt a tanulmányt csak helyenként lehetne — a legújabb vizsgálatok alapján —

néhány szóban módosítani. A jelent és a jövőt illetően azonban még mindig vannak teendők, nem hiányoznak a tervek sem. Igen lényegesnek véljük — többek között — például a Magyar Tudományos Akadémia levéltárában őrzött Bolyai-hagyaték gondos áttanulmányozását. Sok fáradhatatlan kutató (Szabó Sámuel, 1829—1905, Szabó Péter, 1867—1914, Hints Elek, 1893—1966 és mások) hagyatékában is bizonyára vannak még kiadásra érdemes iratok. Ezek tovább pontosíthatnák Bolyai Jánosra vonatkozó ismereteinket.

AZ ÜDVTAN

Befejezésként Bolyai János kézirati hagyatékának azon részeit foglaljuk össze, melyek nem matematikai tárgyúak, hanem a haladó gondolkodású tudós más természetű megjegyzéseit tartalmazzák. Alexits György és Benkő Samu igényes könyve lehetővé teszi, hogy e fejezetet rövidre méretezzük, és a részletek iránt érdeklődők figyelmét e tanulmányokra hívjuk fel.

Ismeretes, hogy Bolyai János mindig foglalkozott matematikai problémákkal, de életének utolsó

szakaszát egy általánosabb törekvés, az emberiség boldogulását elősegítő, enciklopédia jellegű munka összeállítása töltötte ki. Itt rögtön felvetődik az a kérdés, hogy elmélkedéseinek fő területe miért kanyarodott el ebbe az irányba. Úgy vélem, hogy — ifjúkori geometriai eredményeinek sikertelenségén kívül — a matematika rohamos fejlődésében kell keresnünk a választ: a múlt század második negyedében merőben új kutatási területek nyíltak a matematikában, az önálló vizsgálatokba való bekapcsolódáshoz szükségessé vált az egyre mélyülő és szélesedő matematikai apparátus elsajátítása, a monográfiák és az ekkor már szép

számmal megjelenő matematikai folyóiratok tanulmányozása. A matematika tehát túlhaladt az előző korok azon szintjén, midőn még csaknem minden ágában lehetett újat alkotni különösebb irodalmi tájékozottság nélkül is. Domáldi, majd marosvásárhelyi magányában Bolyai Jánosnak nem volt arra lehetősége, hogy a legújabb matematikai eredményeket figyelemmel kísérje, ezért fordulhatott olyan területek felé, amelyek filozófiai képzettsége, átlagon felüli műveltsége és tépelődésre hajlamos természete alapján új eredményeket ígértek.

Nem matematikai gondolatait a kézirati hagyaték szétszórt feljegy-

zései, továbbá az *Üdvtan* sorai őrzik. A kézirati hagyatékból csaknem válogatás nélkül veszünk át néhány idézetet Benkő Samu, Szarvadi Tibor és Tordai Zádor összeállítása alapján. Az idézetek megértése — figyelmes olvasás esetén — talán nem okoz nehézséget, bár meg kell jegyeznünk, hogy amilyen precízen, szabatosan, tömören tud fogalmazni Bolyai János, ha matematikai tartalomról van szó, éppen olyan nehéz számára más természetű gondolatainak papírra vetése. Halmazza a rokonértelmű szavakat, keresvén a legmegfelelőbbet, stílusa helyenként régies, olykor dagályos. Az idézetek — ezek ellenére — egy haladó

gondolkodású, filozófiai, társadalmi, pedagógiai téren ahhoz a korhoz képest modern elveket valló tudós eszmetöredékei.

„... az anyag állapotja által a lelki állapotok is megvannak határozva s meg-fordítva [kölcsönösen] ...”

„Élet, s lélek tehát csak anyaggal test[ben]tel lehet.”

„... szünetlen nagyobb, kisebb, de általános Forradalom van a Földön, mind addig: míg az Emberiség csak egy Tagja keblét is a meglegedetlen- s boldogtalanság minája [= aknája] tölti ...”

„Képtelenség, természetelleni, s igazságtalan is lenne: hogy valaki minden munka nélkül a más fárad-

sága gyümölcsének egy részét magának tulajdonítsa [elsajátítsa].”

„Csupán a mások verejtéke után és zsírján, csak az ősök netaláni érdemeikre s szerzeményeikre támaszkodva, össze-dugott vagy egész nap zsebbe tartott kezekkel és minden lényeges elmélkedés és ipar nélkül, várni a sült galambnak a szájba repülését, szóval here-módra ingyen élni, vagy-is inkább vegetálni, nagyobb szégyen, gyalázat, véték: mint koldulni.”

„... már gyermek-korom óta ki-irthatatlan ellenszenvvel viseltettem minden aristokratiai gőg és dölýf iránt.”

„A pénz arisztokrátiát mondják némelyek, hogy soha ki nem me-

gyen divatból: én pedig azt állítom, hogy . . . az eddigi pénz istenítés, aranybálványozás is *megszűnend.*”

„ . . . az egész helység határát, mezejét, kül-földjét eggyé olvasztva . . . egyenlő számú napokon, órákon által közösen kell műveltetni.”

„ . . . leg-jobb . . . a határt *fölnem osztani*, hanem az egész földet, vizeivel s lég-körével együtt, mint az azt termékenyítő nap közös . . . az *egész emberiség* . . . közbirtokául [kell] hagyni.”

„ . . . valamig a föld népét embertelenül, ingyen sanyargató, nemesek vagy urak lesznek: ama fő-cél mind nehezebben s több szükséges vigyázattal értetődik el, mi-

vel ezeknek érdekekben van [fekszik]: a régi megszokott, de nem érdemlett jótól meg-nem válni.”

Az önkényuralom éveiben kialakult állapotokra céloz a következő idézet: „... az atya a fijának, a fiú az atyának, testvér testvérnek már többé alig hiszen, félvén az elárultatástól”.

„... *tanulja-meg*, *értse-meg* mindenki a *műveltség*, de az igazi mű[veltség] becsét.”

„... mint az anyag-, úgy a szemmel- Világban is, bár-mely mű- s fényes intézet *becsét* kételyen kívül csak annak *hatása* — vagy-is a *közüdvre* sükeres- vagy hasznos- vagy foganatos- vagy célszerű-voltából ítélhetni meg.”

„Ha csakugyan éljenezni kell; inkább mondom: éljen minden *becsületes* ember — mily nagyobb kisebb mértékben minden Nemzetbeli között van —; s vesszen minden gazember — mily fájdalom! Magyar elég van. — Más hűrt lesz tehát föl-húzni, s az Ázsiai gőgöt, dölyföt, magavetést levetközni.”

„Senki inkább nem szereti, becsüli pártolja az oláh-nemzetet nálamnál, s mint *embert* éppen úgy szeretem, mint a magyart.”

Bolyai János legterjedelmesebb és szerkezetileg összefüggő egészét alkotó kézírata, amelynek végleges címe *Üdvtan* lett volna, vol-

taképpen enciklopédikus mű:
 több-kevesebb részletességgel he-
 lyet kapott volna benne minden
 tudományág. E munka összeállí-
 tásához már a harmincas években
 hozzákezdett, de a kéziratok szá-
 ma főleg domáldi magányában
 szaporodott. A tervezetben — ne-
 hezen kihámozható módon —
 sorrendezi az egyes tudományokat,
 első helyre téve a nyelvet, de leg-
 nagyobb súllyal a matematikát
 szerepeltetve. Azonban a nyel-
 vekre vonatkozó észrevételeiben
 sem tagadja meg matematikai be-
 állítottságát. A nyelvet gondolatai-
 nak kifejezésére szolgáló *jelrend-
 szernek* tekinti, melynek alakításá-
 ban és fejlesztésében szerepet kell

kapnia az ésszerűségnek, a lehető rövidségnek és alkalmanként a matematikai szimbólumoknak is. Ez utóbbi gondolatával magyarázhatjuk, hogy írásos hagyatékában gyakran találjuk egyes szavak pótlására az akkor már használatos matematikai jeleket (pl. kisebb, nagyobb, egyenlő, hasonló stb.). A nyelvvel kapcsolatos nézeteit egyesek az információelmélet nagyon korai és kissé leegyszerűsített előfutárának vélik. De az a tény, hogy több helyen is tépelődik a nyelv struktúráján, eszünkbe juttatja a legújabb idők olyan vizsgálatait, melyek a nyelvek szerkezetének axiomatikus megalapozását iparkodnak tisztázni.

A hagyatékból az is kiolvasható, hogy kik hatottak nyelvi elgondolásainak alakulására (Köteles Sámuel, Szász Károly), azonban az egyes személyeken kívül figyelembe vette a Magyar Tudós Társaság nyelvművelő célkitűzéseit is. Ezen a téren azonban nem esett számos kortársa ma már mosolyra fakasztó azon túlzásába, hogy minden idegen matematikai szónak erőszakkal keresse a magyar megfelelőjét. Erre vonatkozólag a következőt írja: „Valamikor pedig egy szó nyelvünkben hiányzik s nem idomíthatjuk jó móddal nyelvünk szelleme . . . szerint . . . semmit sem kételkedjünk más jeles nemzet abbéli szavát . . . nyelvünk sa-

játjává tenni.” Voltaképpen ennek a gondolatnak megfelelően kezdett kialakulni a múlt század második felétől kezdve internacionális és sikerült magyar szavakból álló matematikai szókincsünk.

Ugyancsak összefoglaló munka lebegett a szeme előtt az *Údvtan* bizonyára legértékesebb részének, a matematikát tárgyaló fejezetnek a fogalmazása során. Ebben a matematika több ága (aritmetika, számelmélet, geometria, formális logika, mechanika) kapott volna helyet. Itt különösen a geometriát megalapozó fejezet tartalmaz figyelemreméltó gondolatokat. Főleg erre vonatkozik Bolyai János következő megjegyzése: „Sok

olyan dolog, amelyet különben nehézkesen szoktak bizonyítani, itt majdnem közvetlenül világos, míg sok olyan dolgot a leggondosabban kifejtünk itt, melyekre különben egyáltalában nem szoktak tekintettel lenni.” Ebben a részben érdekes topológiai természetű megjegyzéseket olvashatunk, de a legújszerűbb az, hogy Bolyai János megkísérelte az euklideszi-geometriának a szokásos alapfogalmaktól (pont, egyenes, sík) eltérő alapfogalmakra való fölépítését. Ez irányú elgondolásait Springer (Sályi) István egészítette ki. Springer vizsgálatának a végeredménye az, hogy Bolyai gondolata termékeny ugyan, de az euklideszi geo-

metria hiánytalan felépítéséhez további kiegészítések szükségesek. Nagyon érdekes még a kézirati hagyaték azon része, mely a geometriai szerkesztések elméletével foglalkozik.

Az *Űdvtan* tárgyalja a különféle művészeteket is. Ezen a területen főként az építőművészet köti le Bolyai figyelmét. Abafáy Gusztáv szerint azért, „mert az arányosság mint geometriai törvényszerűség az építészeti műalkotás létrejöttének, megvalósulásának sine qua non-ja”. Ennek a megállapításnak elismerjük a helyességét, de hozzá kell tennünk, hogy Bolyai János „hivatalból” is vonzódhatott e kérdéshez, hisz bécsi tanulmányai-

nak az építészet volt az egyik fő tárgya, és képzettsége szerint mérnök volt.

A zenében, főként a hegedűművészetben való jártasságával magyarázhatjuk e kérdés iránti vonzalmát, és a zeneelméletben kifejtett néhány új gondolatát. Ezt több tanulmány részletezi, legutóbb Benkő András szakszerű könyve tárgyalja. Bolyai szétszórt följegyzéseiből az érződik, hogy többre értékelte az előadóművészetet, a technikai jártasságot, mint magát a zeneművet. Talán ezzel függ össze az a javaslata, hogy az oktávot 12 félhangra kellene felosztani. Egyébként az ógörögöktől kezdve a múlt század közepéig

számos — köztük magyar — matematikus kapcsolta össze a matematikát és a zenét, mivel a muzsikának aritmetikai vonatkozásai is vannak.

Ám bármiről is fejt ki Bolyai János a véleményét, gondolatai mögül minduntalan fölbukkan a matematikus. Eszmevilágának e tudomány az alfája és omegája, reménykedései során mindig annak nagyjai közé tartozónak álmodta magát.

BIBLIOGRÁFIA

Bolyai János művei

Appendix. Scientiam Spatii absolute veram exhibens: a veritate aut falsitate Axiomatibus XI. Euclidean (a priori haud unquam decidenda) independentem; adjuncta ad casum falsitatis, quadratura circuli geometrica. Először szeparátumként jelent meg. Marosvásárhely, 1831.

Értekezés a képzetes mennyiségekről. Megjelent Stäckel később említendő könyvében, II. 238–249.

A tér tudománya. Stäckel könyvében, II. 251–288.

A Bolyai Jánossal foglalkozó szakirodalomból

FRISCHAUF, J.: *Absolute Geometrie nach Johann Bolyai.* Leipzig, 1872.

SZILY KÁLMÁN: *Adatok Bolyai Farkas életrajzához.* Értekezések a Matematikai Tudományok köréből 1885. 9. sz. 1–36.

- BEDŐHÁZI JÁNOS: A két Bolyai élete és munkássága. Marosvásárhely, 1897.
- BOLYAI FARKAS ÉS GAUSS FRIGYES KÁROLY LEVELEZÉSE. Leipzig, 1899. Ugyanez német címmel, ugyanekkor.
- SCHLESINGER LAJOS: Bolyai János. Matematikai és Fizikai Lapok 1903. 12. köt. 57–88.
- STÄCKEL PÁL: Bolyai Farkas és Bolyai János geometriai vizsgálatai. I–II. Bp., 1914. Ugyanez németül, Leipzig–Berlin, 1913.
- SZABÓ PÉTER: Bolyai János ifjúsága. Matematikai és Fizikai Lapok 1910. 135–164.
- DÁVID LAJOS: A két Bolyai élete és munkássága. Bp., 1923.
- JELITAI JÓZSEF: Önéletrajzi részletek Bolyai János Űdvtanában. Matematikai és Természettudományi Értesítő 1939. 35–40.
- DÁVID LAJOS: Bolyai-geometria az Appendix alapján. Kolozsvár, 1944.
- ALEXITS GYÖRGY: Bolyai János, Bp., 1952.
- BOLYAI JÁNOS ÉLETE ÉS MŰVE. [Tanulmánykötet] Bukarest, 1953.
- SARLÓSKA VINCE ERNŐ: Bolyai János hazassága a köztudatban és a dokumen-

- tumok. Magyar Tudomány 1961. II. sz. 699—709.
- PÁLFFY ILONA—PÁLFFY MIKLÓS: Bibliographia Bolyaiana. Bp., 1962.
- SARLÓSKA ERNŐ: Bolyai János — a katona. A MTA III. Osztályának Közleményei 1965. 4. sz. 341—387.
- BENKŐ SAMU: Bolyai János vallomásai. Bukarest, 1968.
- FRÁTER JÁNOSNÉ: A Bolyai-gyűjtemény. Bp., 1968.
- SZÉNÁSSY BARNA: A magyarországi matematika története. Bp., 1970.
- BERDE KÁROLY: Volt-e Bolyai Jánosnak syphilise? Orvostörténeti Közlemények 1973. 69—70. évf. 131—142.
- BOLYAI JÁNOS: Appendix. A tér tudománya. Szerkesztette, bevezetéssel, magyarázatokkal, kiegészítésekkel ellátta: KÁRTESZI FERENC. Bp., 1973.
- SZÁSZ PÁL: Bevezetés a Bolyai—Lobacsevszkij-féle geometriába. Bp., 1973.
- NEUMANN—SALLÓ—TORÓ: A semmiből egy új világot teremtettem. [Tanulmánykötet] Temesvár, 1974.

WESZELY TIBOR: Bolyai Farkas. Bukarest,
1974. (magyarul és románul)

BENKŐ ANDRÁS: A Bolyaiak zeneelmé-
lete. Bukarest, 1975.

BENKŐ SAMU: Bolyai-levelek. Bukarest,
1975.

SZÉNÁSSY BARNA: Bolyai Farkas. Bp., 1975.



A kiadásért felelős az Akadémiai Kiadó
igazgatója,

Felelős szerkesztő: Róbert Zsófia

Műszaki szerkesztő: Érdi Júlia

Terjedelem: 8,75 (A/5) ív + 1 db melléklet

AK 1338 k 7880

HU ISSN 0133-1884

77.4743 Akadémiai Nyomda, Budapest

Felelős vezető: Bernát György